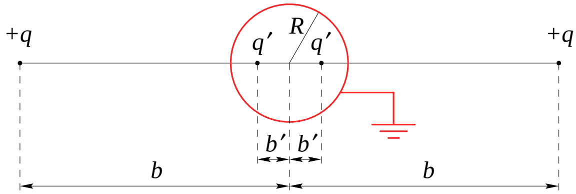
Lösung:

Wir benutzen die Methode der *Spiegelladungen* (Bildladungen) [1], mit der Randbedingungen (hier die geerdete Kugel mit dem Potenzial $\varphi = 0\,\mathrm{V}$) durch Einführung zusätzlicher Ladungen automatisch erfüllt werden. Das elektrische Feld außerhalb der geerdeten Kugel soll identisch mit dem elektrischen Feld sein, welches durch die beiden gegebenen Ladungen $+q$ *und* zwei zusätzliche Spiegelladungen q' erzeugt wird (siehe folgendes Bild).



Die Spiegelladungen im Inneren der Kugel mit dem Radius R können dabei so gewählt werden, dass das Potenzial auf der Kugeloberfläche verschwindet. Damit wäre die Randbedingung der geerdeten Kugel aus der Aufgabe eliminiert.

Die Bedingung für die Größe der Spiegelladungen q' lautet

$$q' = -q\,\frac{R}{b}, \tag{1}$$

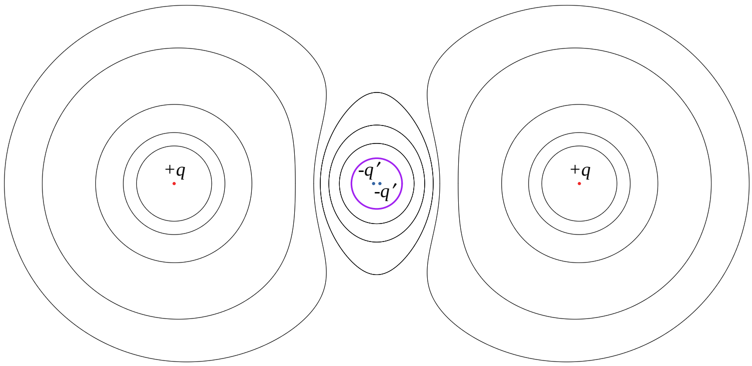
wobei für den Abstand b' vom Kugelmittelpunkt

$$b' = \frac{R^2}{b} \tag{2}$$

gelten muss [1]. Nimmt man diese vier Punktladungen und berechnet das Potenzialfeld gemäß

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=0}^{4}\frac{q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|}, \tag{3}$$

so ergibt sich folgender Verlauf der Äquipotenziallinien:



Um die beiden Spiegelladungen $-q'$ im Zentrum der Anordnung herum verläuft die Linie für $\varphi = 0\,\mathrm{V}$ (in violetter Farbe, hieran ist zu erkennen, dass die geerdete Kugel durch diese Anordnung sehr gut angenähert wird). Weiter von innen nach außen verlaufen die Linien für $\varphi = 10\,\mathrm{V}$, $15\,\mathrm{V}$, $18\,\mathrm{V}$, $20\,\mathrm{V}$, $25\,\mathrm{V}$, $40\,\mathrm{V}$, $60\,\mathrm{V}$ und $80\,\mathrm{V}$.

Für unsere Aufgabe muss nun die resultierende Kraft auf die linke Ladung $+q$ (und ebenso auf die rechte Ladung, die, da das Problem symmetrisch ist, wir nachfolgend nicht gesondert betrachten müssen) verschwinden. Die Resultierende setzt sich zusammen aus der abstoßenden Kraft, hervorgerufen von $+q$ im Abstand $2b$,

$$F_{\text{ab}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot (2b)^2}, \tag{4}$$

und den beiden anziehenden Kräften, hervorgerufen von $-q'$ in den Abständen $b-b'$ bzw. $b+b'$ (s. Bild ganz oben),

$$F_{\text{an}} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(b-b')^2} + \frac{1}{(b+b')^2}\right). \tag{5}$$

Gleichsetzen von (4) und (5) führt mit (1) und (2) auf

$$\frac{q}{4b^2} = \frac{q'}{(b-b')^2} + \frac{q'}{(b+b')^2} = \frac{qR}{b(b-b')^2} + \frac{qR}{b(b+b')^2} \tag{6}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{4b^2} = \frac{R}{b(b-b')^2} + \frac{R}{(b+b')^2} = \frac{R}{b^3\left(1-\frac{R^2}{b^2}\right)^2} + \frac{R}{b^3\left(1+\frac{R^2}{b^2}\right)^2} \tag{7}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{b}{4R} = \frac{1}{\left(1-\frac{R^2}{b^2}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{R^2}{b^2}\right)^2}. \tag{8}$$

Mit der Abkürzung

$$\rho = \frac{R}{b} \tag{9}$$

schreibt sich (8) als

$$1 = \frac{4\rho}{(1-\rho^2)^2} + \frac{4\rho}{(1+\rho^2)^2}. \tag{10}$$

Nun gibt es mindestens zwei Möglichkeiten, diese Gleichung zu lösen.

1. Gleichung (10) wird umgeformt, sodass eine Polynomgleichung 8. Grades entsteht:

$$\rho^8 - 8\rho^5 - 2\rho^4 - 8\rho + 1 = 0. \tag{11}$$

Diese kann mit dem Newton-Raphson-Verfahren oder jedem anderen geeigneten Verfahren (oder mit jedem geeigneten Hilfsmittel) gelöst werden. Es ergibt sich für $0 < \rho < 1$ die Lösung

$$\rho = 0{,}124909 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{R \approx 0{,}124909\, b}. \tag{12}$$

2. Die Brüche auf der rechten Seite von (10) werden für $\rho < 1$ in Potenzreihen entwickelt:

$$\frac{1}{(1-\rho^2)^2} = 1 - 2\rho^2 + 3\rho^4 - 4\rho^6 + 5\rho^8 \mp \ldots \tag{13}$$

$$\frac{1}{(1+\rho^2)^2} = 1 + 2\rho^2 + 3\rho^4 + 4\rho^6 + 5\rho^8 + \ldots, \tag{14}$$

sodass aus (10)

$$\frac{4\rho}{(1-\rho^2)^2} + \frac{4\rho}{(1+\rho^2)^2} = 8\left(\rho + 3\rho^5 + 5\rho^9 + \ldots\right) = 1 \tag{15}$$

folgt. Wird die Reihenentwicklung in (15) nach dem ersten Glied abgebrochen, ergibt sich die Näherung

$$\rho \approx 0{,}125 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{R \approx \frac{b}{8} = 0{,}125\, b}. \tag{16}$$

Ein Abbruch nach dem zweiten Glied führt auf die Gleichung 5. Grades

$$\rho^5 + \frac{1}{3}\rho - \frac{1}{24} = 0, \tag{17}$$

die dieselbe Lösung (12) besitzt.

Bemerkung:

Einige Teilnehmende vergaßen in (5) bzw. (10) den zweiten Summanden auf den rechten Seiten der Gleichungen. Dies führt auf die Gleichung 4. Grades

$$\rho^4 - 2\rho^2 - 4\rho + 1 = 0 \tag{18}$$

mit der (selbstverständlich) falschen Lösung $\rho = 0{,}225270$.

Wird dagegen der erste Summand vergessen, erhält man

$$\rho^4 + 2\rho^2 - 4\rho + 1 = 0 \tag{19}$$

mit den falschen Lösungen $\rho = 1(!)$ und $\rho = 0{,}295598$.

Literatur

[1] Andreas Wipf: „Randwertprobleme der Elektrostatik“, Abschnitt 3.2.2, `https://www.tpi.uni-jena.de/~wipf/lectures/ed/ed3.pdf`.

Punktverteilung:

- 0,2 Punkte nur für die Idee mit den Spiegelladungen
- 0,2 Punkte für q' und b' nach (1) und (2)
- 0,6 Punkte für die Rechnung bis zum Ergebnis (12) oder (16)
- insgesamt nur 0,6 Punkte, wenn in (5) ein Term vergessen wurde (s. Bemerkung oben), aber der Rechenweg korrekt ist