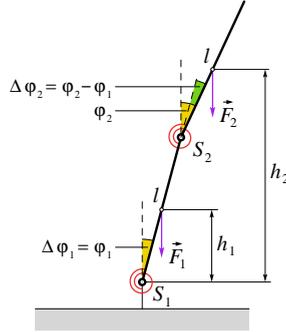


Lösung:

Das folgende Bild zeigt den aus zwei Stäben der Länge l bestehenden Turm in einer Position, in der die Stäbe jeweils um einen Winkel φ_i (von unten nach oben, $i = 1, 2$) gegenüber der Vertikalen ausgelenkt sind:



Die untere Drehfeder S_1 ist somit um den Winkel $\Delta\varphi_1 = \varphi_1$ aus der Ruhelage gedreht, während die obere Drehfeder S_2 um den Winkel $\Delta\varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_1$ aus ihrer Ruhelage ausgelenkt ist.

Wir betrachten im Folgenden die potenzielle Energie Π des gesamten Systems. Diese setzt sich zusammen aus der in den Drehfedern S_i gespeicherten Energie $\frac{k}{2} \Delta\varphi_i^2$ und der potenziellen Energie mgh_i der beiden Stäbe. Wählen wir für Letzere als Nullpunkt das untere Ende des untersten Stabes, so ergeben sich für die Schwerpunkte (als maßgebliche Bezugspunkte bei starren Körpern) die Höhen

$$h_1 = \frac{l}{2} \cos \varphi_1 \quad (1)$$

$$h_2 = l \cos \varphi_1 + \frac{l}{2} \cos \varphi_2. \quad (2)$$

Mit der Gewichtskraft $mg = ql$ ergibt sich daraus für die gesamte potenzielle Energie

$$\Pi(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{k}{2} \varphi_1^2 + \frac{k}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{3ql^2}{2} \cos \varphi_1 + \frac{ql^2}{2} \cos \varphi_2. \quad (3)$$

Die darin enthaltenen nichtlinearen Terme $\cos \varphi_1$ und $\cos \varphi_2$ werden mithilfe der Kleinwinkelnäherung $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ eliminiert[†]. Wir erhalten dadurch

$$\Pi(\varphi_1, \varphi_2) \approx \frac{k}{2} \varphi_1^2 + \frac{k}{2} (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{3ql^2}{2} \left(1 - \frac{\varphi_1^2}{2}\right) + \frac{ql^2}{2} \left(1 - \frac{\varphi_2^2}{2}\right) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(2k - \frac{3ql^2}{2}\right) \varphi_1^2 - 2k\varphi_1\varphi_2 + \left(k - \frac{ql^2}{2}\right) \varphi_2^2 \right] + 2ql^2, \quad (5)$$

die eine *quadratische Form* in φ_1 und φ_2 darstellt und sich mit der Abkürzung

$$\lambda = \frac{2k}{ql^2} \quad (6)$$

in folgender Form schreiben lässt:

$$\Pi(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{ql^2}{4} \left[(2\lambda - 3)\varphi_1^2 - 2\lambda\varphi_1\varphi_2 + (\lambda - 1)\varphi_2^2 \right] + 2ql^2. \quad (7)$$

[†]Es wäre falsch, wenn die Kosinusfunktion mit $\cos x \approx 1$ angenähert werden würde, weil dann die potenzielle Energie unabhängig von den Winkeln konstant wäre. Der quadratische Term $-\frac{1}{2}x^2$ aus der TAYLOR-Reihenentwicklung muss also mitgenommen werden.

Die statischen Gleichgewichtsbedingungen erhalten wir aus (7), indem wir die partiellen Ableitungen gleich null setzen:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = \frac{ql^2}{2} [(2\lambda - 3)\varphi_1 - \lambda\varphi_2] = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = \frac{ql^2}{2} [-\lambda\varphi_1 + (\lambda - 1)\varphi_2] = 0. \quad (9)$$

Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem für die Winkel φ_1 , φ_2 , welches nur dann nichttriviale Lösungen besitzt, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} 2\lambda - 3 & -\lambda \\ -\lambda & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (2\lambda - 3)(\lambda - 1) - \lambda^2 = \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0. \quad (10)$$

Nullstellen der quadratischen Gleichung (10) sind die Werte λ_i ($i = 1, 2$):

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{13}) = 4,30277\ 56377 \quad (11)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{13}) = 0,69722\ 43623 = 5 - \lambda_1, \quad (12)$$

woraus mit (6) sowie den gegebenen Zahlenwerten für q und k

$$l_1 = \sqrt{\frac{2k}{\lambda_1 q}} = 2,156 \text{ m} \quad (13)$$

$$l_2 = \sqrt{\frac{2k}{\lambda_2 q}} = 5,356 \text{ m} \quad (14)$$

folgt. Für genau diese beiden Stablängen sind die statischen Gleichgewichtsbedingungen somit erfüllt.

Die Frage, die das Institut noch beantworten muss, ist, für welche Werte λ bzw. Längen l die *Stabilität* des Turmes bei kleinen Auslenkungen gewährleistet ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die quadratische Form (7) *positiv definit* ist, gleichbedeutend damit, dass das Potenzial Π im Gleichgewichtszustand ein Minimum annimmt. Das bedeutet, dass beliebige kleine Auslenkungen φ_1 , φ_2 aus der statischen Ruhelage immer wieder in die Potenzialmulde zurückführen.

Nach dem Trägheitssatz von SYLVESTER ist eine quadratische Form

$$Q = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + 2c_3 x_1 x_2 \quad (15)$$

genau dann positiv definit, wenn

$$c_1 > 0 \quad \text{und} \quad c_1 c_2 - c_3^2 > 0 \quad (16)$$

gilt. Beide Bedingungen auf (7) angewendet, liefern die Ungleichungen

$$2\lambda - 3 > 0 \quad \implies \quad \lambda > \frac{3}{2} \quad (17)$$

$$(2\lambda - 3)(\lambda - 1) - \lambda^2 = \lambda^2 - 5\lambda + 3 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) > 0, \quad (18)$$

wobei nach (11) und (12) $\lambda_1 > \lambda_2$ ist. Wir können nun drei Fälle unterscheiden:

1. $\lambda > \lambda_1 \approx 4,30$. Dann ist auch $\lambda > \lambda_2 \approx 0,70$, beide Bedingungen (17) und (18) sind erfüllt, das Gleichgewicht ist damit stabil.
2. $\lambda_1 \geq \lambda \geq \lambda_2$. Dann ist Bedingung (18) nicht erfüllt, das Gleichgewicht ist folglich instabil.

3. $\lambda_2 > \lambda$. Dann ist Bedingung (17) nicht erfüllt, das Gleichgewicht ist ebenfalls instabil.

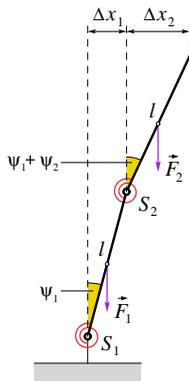
Insgesamt ist der Bauklotzturm bei kleinen Auslenkungen stabil, wenn $\lambda > \lambda_1$ bzw. mit (6) und (13)

$$l < l_{\max} = 2,156 \text{ m} \quad (19)$$

ist.

Alternative Herleitung der Gleichgewichtsbedingungen über die Drehmomente:

Das folgende Bild zeigt den Turm in einer Position, in der die Stäbe jeweils um einen Winkel ψ_i (von unten nach oben, $i = 1, 2$) gegeneinander verkippt sind:



Die Winkel, die die jeweilige Stabachse mit der Vertikalen einschließt, sind dann ψ_1 und $\psi_1 + \psi_2$, wie im Bild eingezeichnet. (Man beachte die veränderte Definition der Winkel ψ_1, ψ_2 gegenüber den Winkeln φ_1, φ_2 in der obigen Lösung!) Damit betragen die horizontalen Auslenkungen (wobei die Kleinwinkelnäherung $\sin \psi \approx \psi$ benutzt wird):

$$\Delta x_1 = l \sin \psi_1 \approx l \psi_1 \quad (20)$$

$$\Delta x_2 = l \sin(\psi_1 + \psi_2) \approx l(\psi_1 + \psi_2). \quad (21)$$

An jeden Stab greift die Gewichtskraft $F = ql$ in seinem Schwerpunkt an, der bei homogenen Stäben auf halber Länge liegt. Dann betragen die treibenden Drehmomente M_i (hervorgerufen durch die Gewichtskräfte F_i) um die Punkte S_i , in denen sich die Drehfedergelenke befinden[‡]:

$$S_1: \quad M_1 = F_1 \frac{\Delta x_1}{2} + F_2 \left(\Delta x_1 + \frac{\Delta x_2}{2} \right) = \frac{ql^2}{2} (4\psi_1 + \psi_2) \quad (22)$$

$$S_2: \quad M_2 = F_2 \frac{\Delta x_2}{2} = \frac{ql^2}{2} (\psi_1 + \psi_2), \quad (23)$$

wobei (20) und (21) für die Auslenkungen Δx_i eingesetzt wurde.

Die Drehfedergelenke reagieren darauf mit rücktreibenden Drehmomenten \overline{M}_i :

$$S_1: \quad \overline{M}_1 = -k\psi_1 \quad (24)$$

$$S_2: \quad \overline{M}_2 = -k\psi_2. \quad (25)$$

[‡]Die Gewichtskräfte bekommen hier ebenfalls Indizes, um die angreifenden Drehmomente besser zu unterscheiden; letztendlich wird $F_1 = F_2 = F = ql$ gesetzt.

Die statischen Gleichgewichtsbedingungen erfordern nun, dass alle resultierenden Drehmomente $M_i + \overline{M}_i$ verschwinden müssen, wenn sich der Turm in seiner Ruhelage befinden soll, also

$$S_1: M_1 + \overline{M}_1 = 0 \implies \frac{ql^2}{2}(4\psi_1 + \psi_2) = k\psi_1 \quad (26)$$

$$S_2: M_2 + \overline{M}_2 = 0 \implies \frac{ql^2}{2}(\psi_1 + \psi_2) = k\psi_2. \quad (27)$$

Mit derselben Abkürzung (6) wie oben*

$$\lambda = \frac{2k}{ql^2} \quad (28)$$

lassen sich (26) und (27) in Matrixform als Eigenwertgleichung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ oder

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (29)$$

schreiben, wobei

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

ist. Die Matrix $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})$ hat die Determinante

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = (4 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - 5\lambda + 3, \quad (31)$$

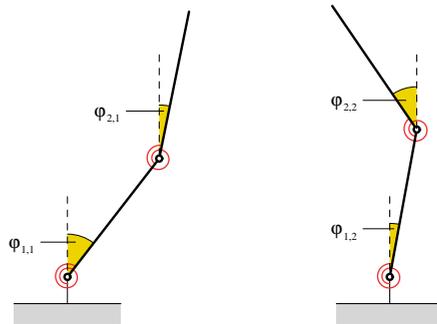
die hier mit (10) übereinstimmt. Insbesondere ergeben sich daraus dieselben Eigenwerte λ_1, λ_2 wie in (11), (12) sowie dieselben Längen l_1, l_2 wie in (13), (14).

Sehen wir uns jedoch noch die Eigenvektoren \mathbf{x}_i ($i = 1, 2$) genauer an. Aus (8) bis (12) ergibt sich:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} \\ \varphi_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_1 - 1)\xi \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,30277 \ 56377 \ \xi \\ \xi \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \varphi_{1,2} \\ \varphi_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda_2 - 1)\xi \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,30277 \ 56377 \ \xi \\ \xi \end{bmatrix}, \quad (33)$$

wobei $\xi \neq 0$ eine beliebige reelle Zahl ist. Dies liefert beispielsweise für $\xi = 0,2$ die Winkel $\varphi_{1,1} = 0,661 \text{ rad} = 37,8^\circ$, $\varphi_{2,1} = 0,2 \text{ rad} = 11,5^\circ$ bzw. für $\xi = -0,6$ die Winkel $\varphi_{1,2} = 0,182 \text{ rad} = 10,4^\circ$, $\varphi_{2,2} = -0,6 \text{ rad} = -34,4^\circ$. Diese beiden „Knickfiguren“ sind in den folgenden Bildern veranschaulicht:



Interessanterweise stellt die linke Knickfigur die stabile Auslenkung dar.

*Eigentlich gilt für die Maßeinheit von λ nach (28) $[\lambda] = \text{rad}^{-1}$; durch die Kleinwinkelnäherung $\sin \psi \approx \psi$ wird λ jedoch dimensionslos.

Bemerkung:

Der Ansatz über die Drehmomentengleichgewichte allein reicht also nicht, die Frage nach der Stabilität des Turmes zu beantworten. Es muss ein geeignetes Kriterium gefunden werden, das eindeutig entscheidet, ob eine stabile, semistabile oder instabile Gleichgewichtslage vorliegt. Dies konnte in der ersten Lösung mithilfe der quadratischen Form formuliert werden.

Punktverteilung:

- 0,7 Punkte für die quadratischen Gleichungen (10) oder (31)
- 0,1 Punkte für die richtigen Lösungen l_1 und l_2
- 0,2 Punkte für die vollständige Begründung, dass der Turm für die größere Stablänge l_2 instabil ist