Lösung:

a) Gleichung (1) durch die Masse m dividiert, liefert die Beschleunigung

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \sigma\sqrt{2\gamma(v-\alpha)+\beta^2}, \tag{2}$$

wobei das Vorzeichen durch $\sigma = \pm 1$ festgelegt wird. Insbesondere gilt für $t = 0$ die Anfangsbeschleunigung

$$a(0) = a_0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \sigma\sqrt{2\gamma(v_0-\alpha)+\beta^2}. \tag{3}$$

Die Differenzialgleichung (DGL) (2) kann durch Separation der Variablen v und t und anschließender Integration gelöst werden:

$$\int\limits_{v_0}^{v(t)} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{2\gamma(v-\alpha)+\beta^2}} = \sigma\int\limits_0^t \mathrm{d}t. \tag{4}$$

Die Substitution

$$u = 2\gamma(v-\alpha)+\beta^2, \qquad \mathrm{d}u = 2\gamma\,\mathrm{d}v \tag{5}$$

liefert

$$\frac{1}{2\gamma}\int\limits_{u_0}^{u(t)} u^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \sigma t \tag{6}$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{u(t)} - \sqrt{u_0} = \sigma\gamma t, \tag{7}$$

mit

$$u_0 = 2\gamma(v_0-\alpha)+\beta^2, \tag{8}$$

und nach Rücksubstitution auf der linken Seite

$$\sqrt{2\gamma(v-\alpha)+\beta^2} = \sqrt{u_0} + \sigma\gamma t \tag{9}$$

$$\Longrightarrow \quad 2\gamma(v-\alpha)+\beta^2 = \left(\sqrt{u_0}+\sigma\gamma t\right)^2 = u_0 + 2\sigma\gamma\sqrt{u_0}\,t + \gamma^2 t^2 \tag{10}$$

$$= 2\gamma(v_0-\alpha)+\beta^2 + 2\sigma\gamma\sqrt{u_0}\,t + \gamma^2 t^2. \tag{11}$$

Weiter folgt daraus

$$v-\alpha = v_0 - \alpha + \sigma\sqrt{u_0}\,t + \frac{\gamma}{2}t^2 \tag{12}$$

$$\Longrightarrow \quad v(t) = v_0 + \sigma\sqrt{u_0}\,t + \frac{\gamma}{2}t^2 \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

und mit (3) schließlich

$$v(t) = v_0 + a_0 t + \frac{\gamma}{2}t^2. \tag{15}$$

Da sich $v(t)$ als ein quadratisches Polynom in t herausstellt, ist die Integration zu $x(t)$ einfach:

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t v(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{x_0 + v_0 t + \frac{a_0}{2}t^2 + \frac{\gamma}{6}t^3}. \tag{16}$$

Das Weg-Zeit-Gesetz $x(t)$ ist also ein **kubisches Polynom in** t. Dabei gilt (16) unabhängig vom Vorzeichenwechsel der Beschleunigung (von „$+ \to -$“ oder „$- \to +$“). Beide Übergänge verlaufen stetig bei t^*.

b) Aus (16) folgt durch zweimalige Differenziation

$$a(t) = \ddot{x}(t) = a_0 + \gamma t, \tag{17}$$

sodass der Vorzeichenwechsel bei $a(t^*) = 0$, also zur Zeit

$$\boldsymbol{t^* = -\frac{a_0}{\gamma}} \tag{18}$$

auftritt. Da die Kraft nach dem NEWTONschen Axiom direkt proportional zur Beschleunigung ist, wechselt bei $t = t^*$ auch das Vorzeichen der Kraft. Der Übergang erfolgt dabei stetig, weil $a(t)$ nach (17) eine lineare Funktion in t ist.

Nach einmaliger Differenziation von (16) folgt das Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz

$$v(t) = v_0 + a_0 t + \frac{\gamma}{2} t^2. \tag{19}$$

Gleichung (18) in (19) eingesetzt, ergibt

$$v(t^*) = v^* = \alpha - \frac{\beta^2}{2\gamma}. \tag{20}$$

Daraus folgt:

- Für $\sigma = +1$ (anfängliche Beschleunigung) ist $v(t^*)$ ein *Maximum.*
- Für $\sigma = -1$ (anfängliche Bremsung) ist $v(t^*)$ ein *Minimum*; bei hinreichend großem a_0 kann $v(t^*) < 0$ und damit eine Rückwärtsbewegung auftreten.

Der Zeitpunkt t^* kennzeichnet den **Moment des Umschaltens von Beschleunigung auf Bremsung (bzw. umgekehrt)** und gleichzeitig das Extremum der Geschwindigkeit.

c) Wählt man $\alpha = v_0$ und $\beta = a_0$, so liest man die Parameter unmittelbar als die Anfangswerte von Geschwindigkeit und Beschleunigung ab. Der Parameter γ ist (und bleibt) die konstante Änderungsrate der Beschleunigung (manchmal als *Jerk* bezeichnet).

Allgemeiner ist α die *Referenzgeschwindigkeit*, er verschiebt die v-Achse. Das kann z. B. ein in Bezug zum Beobachter bewegtes Bezugssystem sein. β ist dabei die *Basisbeschleunigung* an dieser Referenz (die extremale Verschiebung beträgt $\alpha = v^*$, dann ist $\beta = 0$).

Man kann daher α und β wie Koordinatenverschiebung und Skalierung interpretieren, die, solange

$$a_0^2 - \beta^2 = 2\gamma(v_0 - \alpha) \tag{21}$$

gilt, die Bahn $x(t)$, aber auch die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Beschleunigung $a(t)$ nicht verändern. In einer realen Situation hätten wir hier mit diesem Freiheitsgrad die Möglichkeit eine geeignete Messstrategie zu entwickeln. In Grenzen kann man das auch als Eichfreiheit betrachten.

Punktverteilung:

- 0,6 Punkte für die Herleitung von $x(t)$ (16) in a)
- 0,2 Punkte für den Zeitpunkt t^* (18) in b)
- 0,2 Punkte für die physikalische Interpretation in c)