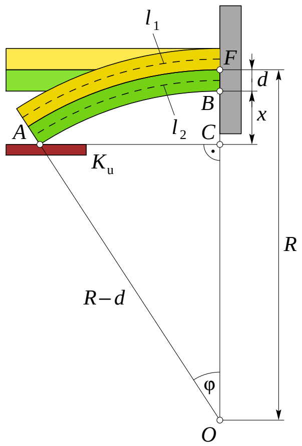
Lösung:

a) Da Zink den höheren linearen thermischen Ausdehnungskoeffizienten beider Metalle hat ($\alpha_2 > \alpha_1$), verkürzt er sich bei Abkühlung stärker als der benachbarte Streifen aus Titan. Da der Zinkstreifen sich unterhalb des Titanstreifens befindet, stößt der Bimetallstreifen an die **untere Kontaktfläche K_u**.

b) Das Bild zeigt den verformten Bimetallstreifen bei der tieferen Temperatur $T_1 = T_0 - \Delta T$:



Die gestrichelten Mittellinien („neutrale Faser“, „Nulllinie“) verkürzen sich dabei aufgrund der thermischen Kontraktion von der Ausgangslänge l_0 auf die Längen

$$l_1 = l_0(1 - \alpha_1\,\Delta T), \qquad l_2 = l_0(1 - \alpha_2\,\Delta T) \tag{1a,b}$$

im verformten Zustand, wobei $l_1 > l_2$ ist. Dabei krümmt sich die Grenzlinie, an der sich beide Metallstreifen berühren, gleichmäßig, also kreisbogenförmig. Ebenso krümmen sich die neutralen Fasern beider Metalle. Das bedeutet, dass es einen Krümmungsmittelpunkt O gibt, der um den Krümmungsradius R unterhalb des Mittelpunktes F des Bimetallstreifens an der festen Einspannung liegt. Der Winkel, der dabei an O aufgespannt wird, sei φ.

Rein geometrisch gilt außerdem für die Bogenlängen

$$l_1 = \left(R + \frac{d}{2}\right)\varphi, \qquad l_2 = \left(R - \frac{d}{2}\right)\varphi. \tag{2a,b}$$

Setzen wir (1a) und (2a) bzw. (1b) und (2b) gleich, ergibt sich

$$\left(R + \frac{d}{2}\right)\varphi = l_0(1 - \alpha_1\,\Delta T), \qquad \left(R - \frac{d}{2}\right)\varphi = l_0(1 - \alpha_2\,\Delta T). \tag{3a,b}$$

Die Gleichungen (3a) und (3b) enthalten drei Unbekannte: R, φ und ΔT. Eliminieren wir daraus z. B. den Winkel φ und stellen nach R um, entsteht

$$R = \frac{d}{2} \cdot \frac{[2 - (\alpha_1 + \alpha_2)\,\Delta T]}{(\alpha_2 - \alpha_1)\,\Delta T}. \tag{4}$$

Diese Gleichung, eventuell mit der Näherung $(\alpha_1 + \alpha_2)\,\Delta T \ll 2$, also

$$R = \frac{d}{(\alpha_2 - \alpha_1)\,\Delta T}, \tag{5}$$

ist zur Berechnung des Krümmungsradius von Bimetallstreifen wohl bekannt.

Für unsere Zwecke ist es jedoch besser, zunächst die Temperaturdifferenz ΔT aus (3a) und (3b) zu eliminieren, weil wir den Winkel φ gleich noch benötigen. Das liefert:

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha_1}\left[1 - \left(R + \frac{d}{2}\right)\frac{\varphi}{l_0}\right] = \frac{1}{\alpha_2}\left[1 - \left(R - \frac{d}{2}\right)\frac{\varphi}{l_0}\right] \tag{6}$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi = \frac{l_0(\alpha_2 - \alpha_1)}{\left(R + \frac{d}{2}\right)\alpha_2 - \left(R - \frac{d}{2}\right)\alpha_1}. \tag{7}$$

Wir brauchen eine weitere Gleichung, die den gegebenen Abstand x mit dem Krümmungsradius R und dem Winkel φ verknüpft. Dazu betrachten wir im obigen Bild den Bogen $\widehat{AB}$ mit dem Radius $R - d$, der die untere Randline des (unteren) Zinkstreifens ist. Er berührt die untere Kontaktfläche K_u im Punkt A. Punkt B ist der untere Punkt des Zinkstreifens an der Einspannstelle. Punkt C liegt auf der Strecke BO, sodass $\angle ACO = 90\,^\circ$ beträgt. Dann gilt im rechtwinkligen Dreieck ACO:

$$|CO| = |AO| \cdot \cos\varphi = (R - d)\cos\varphi = |FO| - |FB| - |BC| = R - d - x \tag{8}$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\varphi = 1 - \frac{x}{R - d}. \tag{9}$$

Wird nun (7) in (9) eingesetzt, ergibt sich eine transzendente Gleichung für die Unbekannte R:

$$f(R) = \cos\left(\frac{l_0(\alpha_2 - \alpha_1)}{\left(R + \frac{d}{2}\right)\alpha_2 - \left(R - \frac{d}{2}\right)\alpha_1}\right) + \frac{x}{R - d} - 1 = 0, \tag{10}$$

die z. B. mit dem Newton-Raphson-Verfahren gelöst werden kann:

$$R_{n+1} = R_n - \frac{f(R_n)}{f'(R_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Beginnen wir mit dem (geschätzten) Krümmungsradius $R_0 = 2{,}0$ m, erhalten wir folgende Ergebnisse während der Iteration:

Iteration	R [in m]	$f(R)$
0	2,000000000000000	−0,000189556396659
1	2,112496926918375	−0,000019085016633
2	2,126540684936987	−0,000000250024523
3	2,126729591258682	−0,000000000044344
4	2,126729624774542	−0,000000000000000

Der Krümmungsradius R, der Winkel φ (nach (7) oder (9)) und die Temperaturdifferenz ΔT (nach (6)) betragen also

$$R = 2{,}12673 \text{ m}, \quad \varphi = 0{,}07517 \text{ rad} = 4{,}31\,^\circ, \quad \Delta T = 43{,}5 \text{ K}, \tag{12}$$

sodass wir als gesuchte Temperatur

$$T_1 = T_0 - \Delta T = \mathbf{-23{,}5\ ^\circ C} \tag{13}$$

erhalten.

Vertiefung:

Da in der Aufgabenstellung keinerlei Kenngrößen, die das elastische Verhalten beider Metalle beschreiben (Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl), vorgegeben wurden und explizit vorausgesetzt wurde, dass die Dicken der Streifen unverändert bleiben, ist eigentlich nur die obige, rein geometrisch motivierte Musterlösung richtig. Dennoch gibt es in der Biegetheorie Modelle, die natürlich auch die Verformungen berücksichtigen (sog. *thermoelastische Kopplung*). Ein noch relativ einfaches Modell dieser Art stammt von VILLARCEAU (1863) und TIMOSHENKO (1925) in Verbindung mit dem Biegemoment aus der klassischen Balkentheorie nach EULER und BERNOULLI.

Hierbei wird davon ausgegangen, dass durch die unterschiedlichen Längenänderungen beider Metalle aufgrund der Temperaturänderung eine elastische Stauchung bzw. elastische Dehnung nach dem HOOKEschen Gesetz ein thermisches Drehmoment erzeugt. Dieses ist gleich zu setzen mit dem Biegemoment, das sich seinerseits aus einer Spannungsverteilung aufgrund einer Krümmung des Materials ergibt. Der daraus resultierende Krümmungsradius R ist verglichen mit (5) um einen zusätzlichen Faktor von $\frac{4}{3}$ größer, was wiederum zur Temperatur $T_1 = -37{,}9\ ^\circ\mathrm{C}$ führt.

Punktverteilung:

- 0,2 Punkte für die richtige Antwort: untere Kontaktfläche K_u in a)
- 0,3 Punkte für die Herleitung von (3a) und (3b) in b)
- 0,4 Punkte für die Lösung der Gleichung (10) oder einer ähnlichen Gleichung
- 0,1 Punkte für das Ergebnis (13)