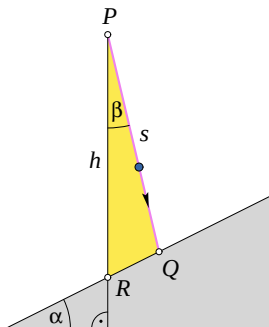


Lösung:

Es gehört mit zur Aufgabe, eine eindeutige Charakterisierung des gesuchten Punktes Q zu finden. Dies kann z. B. ein Winkel oder eine Länge sein, auch Koordinaten wären möglich. Es gibt zwei ausgezeichnete Punkte auf der schiefen Ebene: der Punkt R (im folgenden Bild) senkrecht unter P und der Lotfußpunkt N (im Bild weiter unten) von P auf der schiefen Ebene. Mithilfe dieser beiden Punkte können mehrere Winkel oder Längen definiert werden.

a) Der Punkt, der senkrecht unterhalb von P auf der schiefen Ebene liegt, sei mit R bezeichnet. Die Lage des Punktes Q wird im Folgenden durch den Winkel $\beta = \angle RPQ$ angegeben, wobei β positiv zählt, wenn Q höher als R liegt, anderenfalls negativ, siehe folgendes Bild:



Wir betrachten nun das Dreieck RPQ . In ihm ist die Seite $h := |RP|$ konstant, d. h. unabhängig von der Lage von Q . Die Strecke $s := |PQ|$ ist die Strecke, die die Punktmasse hinabgleitet. Die beiden anderen Innenwinkel im Dreieck sind:

$$\angle PRQ = 90^\circ - \alpha, \quad \angle PQR = 180^\circ - (\beta + 90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha - \beta. \quad (1a,b)$$

Dann gilt nach dem Sinussatz:

$$\frac{s}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{h}{\sin(90^\circ + \alpha - \beta)} \quad (2)$$

$$\implies s = h \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha - \beta)} = h \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha - \beta)}. \quad (3)$$

Die Beschleunigung a auf der Strecke PQ ergibt sich nach Zerlegung des Vektors $\mathbf{g}$ (senkrecht nach unten) in zwei Komponenten, eine in Richtung PQ und eine rechtwinklig dazu, zu

$$a = g \cos \beta = \text{const.} \quad (4)$$

Wir haben es somit mit einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung zu tun. Strecke s , Beschleunigung a und Zeit t stehen dabei in folgendem bekannten Zusammenhang:

$$s = \frac{a}{2} t^2. \quad (5)$$

Umgestellt nach t^2 folgt daraus mit (3) und (4):

$$t^2 = \frac{2s}{a} = \frac{2h \cos \alpha}{g} \cdot \frac{1}{\cos \beta \cos(\alpha - \beta)}. \quad (6)$$

Wenn t ein Minimum annehmen soll, muss dies auch für t^2 gelten. Aus (6) folgt daraus

$$f(\beta) = \cos \beta \cos(\alpha - \beta) \implies \text{Max.} \quad (7)$$

Nun gibt es mehrere Möglichkeiten, die Funktion $f(\beta)$ zu maximieren.

1. Durch Nullsetzen der 1. Ableitung:

$$f'(\beta) = -\sin \beta \cos(\alpha - \beta) + \cos \beta \sin(\alpha - \beta) = 0 \quad (8)$$

$$\Rightarrow -\tan \beta + \tan(\alpha - \beta) = 0 \quad (9)$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha - \beta) = \tan \beta, \quad (10)$$

d. h., $\alpha - \beta = \beta + \frac{k\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Da aber $\alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ gilt, muss $k = 0$ sein, und es folgt

$$\alpha - \beta = \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\alpha}{2}. \quad (11)$$

Der Vollständigkeit halber muss noch geprüft werden, ob die 2. Ableitung an dieser Stelle negativ ist, wenn ein Maximum vorliegen soll:

$$f''(\beta) = -2[\cos \beta \cos(\alpha - \beta) + \sin \beta \sin(\alpha - \beta)] = -2 \cos(\alpha - 2\beta) = -2 < 0. \quad (12)$$

2. Aus (7) folgt mithilfe der Additionstheoreme

$$f(\beta) = \cos \beta \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos(\alpha - 2\beta) \Rightarrow \text{Max.} \quad (13)$$

Da $\cos \alpha$ konstant ist, folgt $\alpha - 2\beta = 0$, somit wiederum (11).

Es gibt jedoch noch eine viel schönere Lösung des Problems:

1. Alternative Lösung:

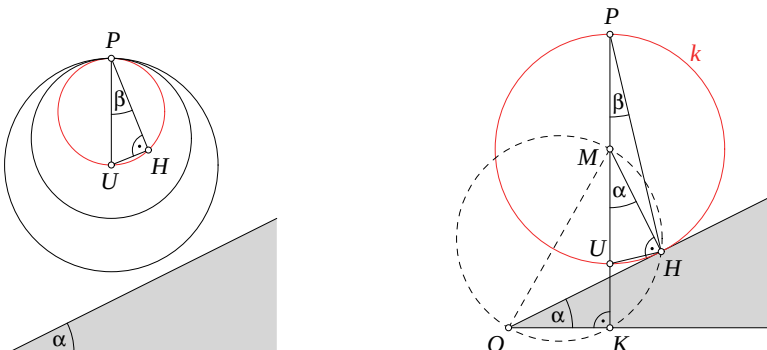
Im folgenden Bild sei $d := PU$ die senkrechte Fallstrecke, für die die Punktmasse die Zeit

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{g}} \quad (14)$$

benötigen würde. Ist dagegen eine andere Fallstrecke PH um den Winkel β geneigt, verkleinert sich die Beschleunigung auf $a = g \cos \beta$. Damit dieselbe Fallzeit t_1 für diese Strecke gilt, muss sie nach (14) auch um denselben Faktor gegenüber d , nämlich $\cos \beta$, verkürzt werden:

$$PH = d \cos \beta. \quad (15)$$

Das bedeutet, dass das Dreieck PUH rechtwinklig bei H ist, und der geometrische Ort für alle Punkte, die die Punktmasse nach gleicher Fallzeit, aber für unterschiedliche Winkel β erreicht, der THALES-Kreis über dem Durchmesser PU ist (im Bild links rot markiert). Zusätzlich sind zwei weitere Kreise für größere Fallzeiten im Bild eingezeichnet. Alle diese Kreise gehen durch P , dem Endpunkt ihrer jeweiligen senkrecht angeordneten Durchmesser.



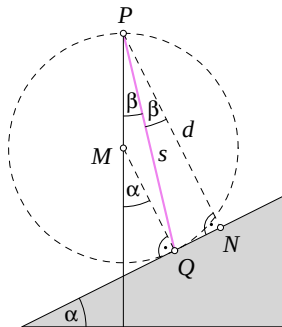
Dieses Resultat erlaubt nun eine sehr elegante, elementargeometrische Lösung der Aufgabe: Es ist derjenige Kreis k gesucht, der die schiefe Ebene im Punkt H zuerst berührt (s. Bild

rechts). Sei M der Mittelpunkt des Kreises. Dann steht der Berührungsradius MH senkrecht auf der schiefen Ebene OH . Weiterhin sei K derjenige Punkt, für den $\angle OKP = 90^\circ$ ist. Damit ist $OKHM$ der THALES-Kreis über dem Durchmesser OM (zwei rechte Winkel bei K und H). Daraus folgt aus dem Peripheriewinkelsatz über der Sehne KH : $\angle KOH = \alpha = \angle KMH$. Im Kreis k ist schließlich $\angle UMH = \alpha$ als Zentriwinkel über der Sehne UH doppelt so groß wie der Peripheriewinkel $\angle UPH = \beta$. Wir erhalten auch hier:

$$\beta = \frac{\alpha}{2}. \quad (16)$$

b) Im folgenden Bild ist zusätzlich der senkrechte Abstand $|PN| = d$ zur schiefen Ebene eingezeichnet. Wegen $MQ \parallel PN$ gilt $\angle QPN = \alpha - \beta = \beta$ und damit $d = s \cos \beta$ oder

$$s = \frac{d}{\cos \beta}. \quad (17)$$

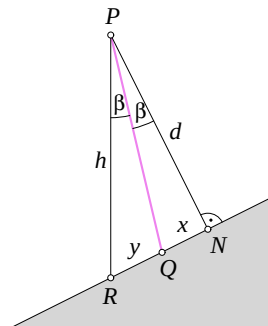


Daraus sowie aus (6) und (4) folgt:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2d}{g \cos^2 \beta}} = \sqrt{\frac{2d}{g}} \cdot \frac{1}{\cos \beta} = \sqrt{\frac{2d}{g}} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 2 \sqrt{\frac{d}{g(1 + \cos \alpha)}}. \quad (18)$$

2. Alternative Lösung:

Der Winkel β , der oben eingeführt wurde, ist nicht die einzige Möglichkeit, den Endpunkt der Gleitstrecke Q zu charakterisieren. Weitere besondere Punkte auf der schiefen Ebene sind der Punkt R senkrecht unterhalb P und N als derjenige Punkt, der den kürzesten Abstand zu P hat, siehe folgendes Bild:



Aus der obigen Lösung ist bekannt, dass die Strecke PQ gerade die Halbierende des Innenwinkels im Dreieck PRN ist. Es gibt nun einen bekannten Satz aus der Elementargeometrie, der besagt,

dass eine Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. In unserem Dreieck lautet dieser Satz mit den Abkürzungen $d = |PN|$, $h = |PR| = \frac{d}{\cos \alpha}$, $x = |QN|$ und $y = |RQ|$:

$$\frac{x}{y} = \frac{d}{h} = \frac{d}{\frac{d}{\cos \alpha}} = \cos \alpha. \quad (19)$$

Außerdem gilt

$$x + y = d \tan \alpha. \quad (20)$$

Das Gleichungssystem (19) und (20) kann nun einfach nach x und y aufgelöst werden:

$$x = d \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = d \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = d (\csc \alpha - \cot \alpha) = d \tan \frac{\alpha}{2}, \quad (21)$$

$$y = d \frac{\tan \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad (22)$$

Beide Längen, x oder y , kennzeichnen also ebenso eindeutig die Lage des Punktes Q .

Bemerkung 1:

In Gleichung (6) für t^2 muss eine neben den Winkeln und g eine Länge auftreten, dort ist es die von Q unabhängige Länge h . Alternativ kann dies aber auch die feste Länge

$$d = h \cos \alpha \quad (23)$$

sein. Gleichung (6) lautet dann

$$t^2 = \frac{2d}{g} \cdot \frac{1}{\cos \beta \cos(\alpha - \beta)}. \quad (24)$$

Bemerkung 2:

Es reicht nicht für die eindeutige Lage von Punkt Q , etwa nur die Länge $s = |PQ|$ anzugeben. Es gibt zu jedem $Q \neq N$ einen zweiten, spiegelbildlichen Punkt Q' auf der anderen Seite des Lotes, der dieselbe Entfernung $s = |PQ'|$ zu P hat. Es muss in der Lösung zu erkennen sein, welcher der beiden Punkte gemeint ist (es ist immer derjenige, der zwischen R und N liegt).

Im Bild in der Aufgabenstellung wurde bewusst der Fall gezeichnet, dass der gesuchte Punkt Q auf der „falschen Seite“ (nämlich links von der Senkrechten PR) gewählt wurde. Er ist jedoch stets ein innerer Punkt der Strecke RN . Wurde diese Einschränkung nicht erkannt (etwa durch Wiederholung des „falschen Bildes“ oder ohne expliziten Hinweis im Text), erfolgt ein Punktabzug von 0,1 Punkten.

Punktverteilung:

- 0,1 Punkte für $a = g \cos \beta$ oder eine analoge Gleichung
- 0,1 Punkte für $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ oder $t^2 = \frac{2s}{a}$ als zu minimierende Funktion
- 0,4 Punkte für die restliche vollständige Herleitung von $\beta = \frac{\alpha}{2}$ in a)
- 0,1 Punkte Abzug, wenn die richtige Lage von Q nicht erkennbar ist (s. Bemerkung 2)
- 0,4 Punkte für Gleichung (18) in b)
- 0,05 Punkte Abzug, wenn $f''(\beta) < 0$ vergessen wurde zu überprüfen