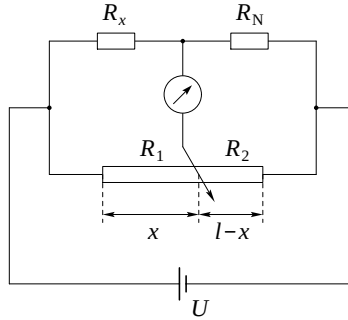


Lösung:

In der Aufgabenstellung wurde bewusst auf eine Schaltskizze verzichtet, da die WHEATSTONE-Brücke bereits einmal Thema einer Physikmarathon-Aufgabe im Jahr 2023 war (Aufgabe 2). Zunächst muss man sich über die Schaltung der WHEATSTONE-Brücke klar werden, damit die Gleichung für den unbekannten Widerstand R_x korrekt aufgestellt werden kann. Die Brücke selbst besteht aus vier Widerständen R_x , R_N , R_1 , R_2 , dem Nullindikator (Volt-, Amperemeter oder Oszillograf) und einer Spannungsquelle U . Dabei liegen die in Reihe geschalteten Widerstände R_x und R_N sowie die Widerstände R_1 und R_2 parallel zur Spannungsquelle, und das Messgerät verbindet den Verbindungspunkt von R_x und R_N mit demjenigen von R_1 und R_2 . Bei unserer Messbrücke sind R_1 und R_2 nicht als separate Widerstände ausgeführt, sondern bilden zusammen den Schiebewiderstand. Dabei ist darauf zu achten, dass R_1 (mit der Windungszahl n) parallel zu R_x liegt und folglich R_2 (mit der Windungszahl $N - n$) parallel zu R_N . Der Verbindungspunkt von R_1 und R_2 ist hier der Mittelabgriff des Schiebewiderstands.

a) Das folgende Bild zeigt die WHEATSTONE-Brücke im abgeglichenen Zustand.



Der Grenzfall $N \rightarrow \infty$ bedeutet, dass anstelle vom „diskret“ aufgebauten Schiebewiderstand zu einem kontinuierlich einstellbaren Widerstand übergegangen werden muss. Dementsprechend werden die diskreten Windungszahlen n und N durch die stetigen Längen x (parallel zu R_x , siehe Bild) bzw. l ersetzt:

$$n \in \mathbb{N} \rightarrow x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

$$N \in \mathbb{N} \rightarrow l \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Dies ist notwendig, da das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz die Bildung von ersten (partiellen) Ableitungen erfordert, und diese sind nur auf stetigen Funktionen definiert.

Für die abgeglichene Brückenschaltung gilt bekanntlich[†]

$$\frac{R_x}{R_N} = \frac{x}{l-x} \implies R_x = \frac{x}{l-x} R_N. \quad (3)$$

Gemessene Größen, die mit Unsicherheiten behaftet sind, sind hier x (bzw. n) und R_N . Das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz (für die absolute Messunsicherheit) lautet demzufolge

$$\Delta R_x = \left| \frac{\partial R_x}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial R_x}{\partial R_N} \right| \Delta R_N. \quad (4)$$

Die beiden partiellen Ableitungen errechnen sich nach (3) zu

$$\frac{\partial R_x}{\partial x} = \frac{[(l-x) - x(-1)]R_N}{(l-x)^2} = \frac{lR_N}{(l-x)^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial R_x}{\partial R_N} = \frac{x}{l-x}, \quad (6)$$

[†]Gleichung (3) musste hier nicht explizit hergeleitet werden.

sodass aus (4)

$$\Delta R_x = \frac{l R_N}{(l-x)^2} \Delta x + \frac{x}{l-x} \Delta R_N \quad (7)$$

folgt. Division durch R_x nach (3) führt auf die relative Messunsicherheit:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{l \Delta x}{x(l-x)} + \frac{\Delta R_N}{R_N}, \quad (8)$$

die es nun als Funktion von x zu minimieren gilt. In ihr sind alle auftretenden Größen auf der rechten Seite außer x Konstanten. Daher genügt es, in (8) das Minimum des ersten Summanden zu bestimmen.

Die Ermittlung des Minimums kann auf zwei Arten durchgeführt werden: i) elementar durch eine quadratische Ergänzung des Nennerpolynoms in x , oder ii) als Extremwertaufgabe.

i) Die zu minimierende Funktion ist ein Bruch, dessen Zähler $l \Delta x$ konstant ist. Also muss der Nenner

$$x(l-x) = -x^2 + lx = -\left(x^2 - lx + \frac{l^2}{4}\right) + \frac{l^2}{4} = \frac{l^2}{4} - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 \quad (9)$$

maximal werden. Dies ist offensichtlich für $\hat{x} = \frac{l}{2}$ der Fall, denn es gilt die Ungleichung

$$x(l-x) = \frac{l^2}{4} - \left(x - \frac{l}{2}\right)^2 \leq \frac{l^2}{4} \quad (10)$$

mit Gleichheit nur für $\hat{x} = \frac{l}{2}$.

ii) Wir betrachten die Funktion $f(x) = x(l-x)$ und differenzieren sie einmal nach x :

$$f'(x) = -2x + l \stackrel{!}{=} 0 \quad \implies \quad \hat{x} = \frac{l}{2}. \quad (11)$$

Selbstverständlich muss an dieser Stelle überprüft werden, ob die zweite Ableitung für das Vorliegen eines Maximums kleiner als null ist:

$$f''(\hat{x}) = -2 < 0. \quad (12)$$

Damit ist bewiesen, dass die relative Messunsicherheit tatsächlich am geringsten ist, wenn der Abgleich in der Mitte des Schiebewiderstandes ($n = \frac{N}{2}$ im diskreten Fall) erfolgt. $\square$

b) Wir müssen nur die gegebenen Werte und $\Delta n = 1$ in die diskrete Version von (7), also

$$\Delta R_x = \frac{N R_N}{(N-n)^2} \Delta n + \frac{n}{N-n} \Delta R_N, \quad (13)$$

einsetzen und erhalten damit

$$\Delta R_x = 2,9917 \Omega + 4,4737 \Omega \approx \mathbf{7,47 \Omega}. \quad (14)$$

Bemerkung 1:

Obwohl in der Aufgabenstellung ausdrücklich die Anwendung des linearen Fehlerfortpflanzungsgesetzes gefordert war, erhält man dasselbe Ergebnis auch mit dem *gausschen* oder *quadratischen Fehlerfortpflanzungsgesetz*. Aus

$$\Delta R_x = \sqrt{\left(\frac{\partial R_x}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial R_x}{\partial R_N}\right)^2 (\Delta R_N)^2} \quad (15)$$

folgt mit (5) und (6)

$$(\Delta R_x)^2 = \left(\frac{l R_N}{(l-x)^2} \right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{x}{l-x} \right)^2 (\Delta R_N)^2 \quad (16)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta R_x}{R_x} = \sqrt{\left(\frac{l \Delta x}{x(l-x)} \right)^2 + \left(\frac{\Delta R_N}{R_N} \right)^2}. \quad (17)$$

Mit derselben Argumentation wie oben (und, dass der relative Fehler $\frac{\Delta R_x}{R_x}$ und sein Quadrat an derselben Stelle ein Extremum annehmen) wird der erste Summand auf der rechten Seite für $\hat{x} = \frac{l}{2}$ minimal. Wir ziehen aber 0,1 Punkte ab, wenn fälschlicherweise explizit geschrieben wurde, dass (15) das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz sei. Selbst WIKIPEDIA scheint den Begriff „*lineares Fehlerfortpflanzungsgesetz*“ nicht zu kennen. Wir sind jedoch der Meinung, dass dieser Begriff eindeutig auf (4) zutrifft und nicht auf (15).

Man erhält hier den etwas kleineren Wert $\Delta R_x = 5,38 \Omega$ im Vergleich zu (14).

Bemerkung 2:

Viele Teilnehmer:innen missverstanden den Operator „Beweise, ...“ am Anfang von Aufgabenstellung a). Ein Beweis verlangt, ausgehend von richtigen Annahmen, in logisch korrekten Schritten die aufgestellte Behauptung abzuleiten (zu zeigen, herzuleiten). Es ist ein logischer Fehler, wenn die Behauptung mittendrin irgendwo benutzt wird, um damit weiterzurechnen oder weiter zu argumentieren.

Punktverteilung:

- 0,8 Punkte für den vollständigen Beweis unter a)
- nicht mehr als 0,3 Punkte für Teil a), wenn Bemerkung 2 zutrifft
- 0,1 Punkte Abzug, wenn in a) die wegen $n, N \in \mathbb{N}$ nicht differenzierbare Funktion

$$R_x = \frac{n}{N-n} R_N \quad (18)$$

versehentlich nach n und N „abgeleitet“ wurde

- 0,05 Punkte Abzug, wenn in a), Fall ii), vergessen wurde, die zweite Ableitung (12) zu überprüfen
- kein Punktabzug, wenn anstelle von (8) das gaussische Gesetz (17) genommen wurde
- aber 0,1 Punkte Abzug, wenn explizit zu lesen ist, dass (15) das lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz sei
- 0,2 Punkte für den richtigen Zahlenwert (14) in b)
- nur 0,15 Punkte in b), wenn ein Summand in (8) oder (17) vergessen wurde