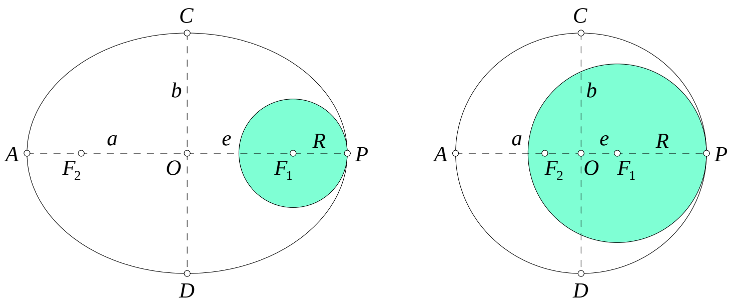
Lösung von Aufgabe 20:

Die folgenden Bilder zeigen die Geometrie zweier elliptischer Satellitenbahnen, die die Erdoberfläche im *Perigäum* P gerade berühren. Der Erdmittelpunkt liegt immer in einem der beiden Brennpunkte der Ellipse, hier in F_1. Das *Apogäum* A (erdfernster Punkt der Umlaufbahn) liegt genau entgegengesetzt vom Perigäum P (erdnächster Punkt). O sei der *Mittelpunkt* der Ellipse.



Dann ist $OA = OP = a$ die *große Halbachse* und $OC = OD = b$ die *kleine Halbachse* der Ellipse. Der Abstand $OF_1 = OF_2 = e = \sqrt{a^2 - b^2} \geq 0$ ist als *lineare Exzentrizität* bekannt. Schließlich ist die *numerische Exzentrizität* definiert durch $\varepsilon = \frac{e}{a}$. Im obigen Bild links ist $\varepsilon_1 \approx 0{,}66$, im rechten Bild $\varepsilon_2 \approx 0{,}29$.

Aus den Bildern lesen wir nun folgende Bedingung ab, dass die Umlaufbahn weder in die Erde eindringt noch die Erdoberfläche berührt:

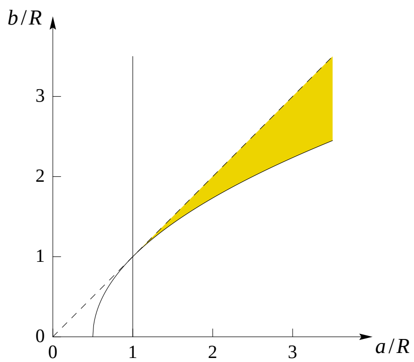
$$F_1P = a - e = a - \sqrt{a^2 - b^2} > R. \tag{1}$$

Ungleichung (1) lässt sich nun auf zwei unterschiedliche Weisen lesen:

$$a - e > R \quad \Longrightarrow \quad a > R + e \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{a > R} \tag{2}$$

$$a - R > \sqrt{a^2 - b^2} \quad \Longrightarrow \quad b^2 > R(2a - R) \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{b > \sqrt{R(2a - R)} = R\sqrt{\frac{2a}{R} - 1}}. \tag{3}$$

Beide Ungleichungen (2) und (3) lassen sich nun zusammen mit der allgemeingültigen Bedingung $a \geq b$ in einem a-b-Diagramm darstellen:



Die gelb markierte Fläche ist hier der zulässige Bereich für die beiden Halbachsen. Die obere Begrenzungskurve gilt für $\varepsilon \to 0$, also kreisförmige Umlaufbahnen, während die untere für Ellipsen mit höherer numerischer Exzentrizität ε zutrifft.

Punktverteilung:

- 0,5 Punkte für das Ableiten von Bedingung (1)
- 0,25 Punkte für Bedingung (2)
- 0,25 Punkte für Bedingung (3)
- 0,05 Punkte Abzug, wenn der Fall $a = R$ nicht ausgeschlossen wurde
- 0,05 Punkte Abzug, wenn (3) nicht nach b aufgelöst wurde
- keinen Punktabzug, wenn in (3) nicht die Wurzel gezogen wurde und die Ungleichung für b^2 angegeben wurde