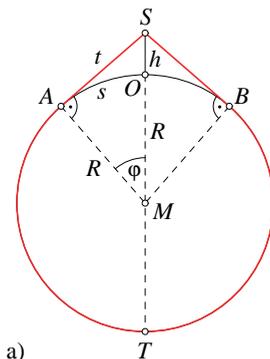


Lösung:

a) Das nachfolgende Bild a) veranschaulicht die Geometrie der Aufgabenstellung; es ist natürlich nicht maßstabsgerecht:



Dabei bezeichnen  $M$  den Erdmittelpunkt,  $A$  und  $B$  die beiden Punkte auf der Erdoberfläche, an denen sich das Seil von der Oberfläche löst und  $O$  denjenigen Punkt senkrecht unter Punkt  $S$ . Außerdem sei der Tangentenabschnitt  $t := SA = SB$ , der halbe, nicht vom Seil berührte Teil des Großkreises  $s := \widehat{AO} = \widehat{BO}$ , die gesuchte Höhe  $h := SO$ , der Winkel  $\varphi := \angle AMS$  und die halbe gegebene Verlängerung des Seils

$$\Delta l := t - s = 0,5 \text{ m.} \quad (1)$$

Da das Problem offensichtlich symmetrisch bezüglich der Geraden durch die Punkte  $S$ ,  $O$  und  $M$  ist, betrachten wir nachfolgend nur die linke Hälfte. Dann gilt im rechtwinkligen Dreieck  $MAS$  und auf dem Großkreis:

$$t = R \tan \varphi \quad (2)$$

$$s = R\varphi, \quad (3)$$

also mit (1)

$$\Delta l = R(\tan \varphi - \varphi) \quad \Longrightarrow \quad f(\varphi) = \tan \varphi - \varphi - \frac{\Delta l}{R} = 0. \quad (4)$$

Gleichung (4) ist eine transzendente Gleichung zur Berechnung des Winkels  $\varphi$ , die z. B. mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren gelöst werden kann:

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \frac{f(\varphi_n)}{f'(\varphi_n)} = \varphi_n - \frac{\tan \varphi_n - \varphi_n - \frac{\Delta l}{R}}{\frac{1}{\cos^2(\varphi_n)} - 1}, \quad \varphi_0 = 0,0003. \quad (5)$$

Der Startwinkel  $\varphi_0$  darf dabei nicht zu klein gewählt werden ( $\varphi_0 \gtrsim 0,00023$ ), da das Verfahren ansonsten divergiert. Als Ergebnis erhalten wir nach einigen Iterationen:

$$\varphi = 0,00617 \, 258 \text{ rad} = 0,354^\circ. \quad (6)$$

Aus (2) und (3) folgt damit

$$s = 39 \, 368,71 \text{ m} \quad (7)$$

$$t = 39 \, 369,21 \text{ m.} \quad (8)$$

Tatsächlich ist der Tangentenabschnitt  $t$  um 0,5 m länger als der Kreisbogen  $s$ . Allerdings ist die Differenz erst in der 6. signifikanten Dezimalstelle zu erkennen, sodass bei den numerischen Berechnungen auf eine ausreichende Genauigkeit geachtet werden muss („Stellenauslöschung“). Die gesuchte Höhe  $h$  ergibt sich mithilfe des Satzes des PYTHAGORAS im Dreieck  $MAS$  zu:

$$R^2 + t^2 = (R + h)^2 \quad \Longrightarrow \quad h = \sqrt{R^2 + t^2} - R = \mathbf{121,5 \text{ m.}} \quad (9)$$

Eine derartig große Höhe erscheint unglaublich und war wohl kaum zu erwarten gewesen.

b) Aus dem HOOKEschen Gesetz

$$\sigma = E\varepsilon \quad (10)$$

für eine elastische Beanspruchung des Seils folgt mit

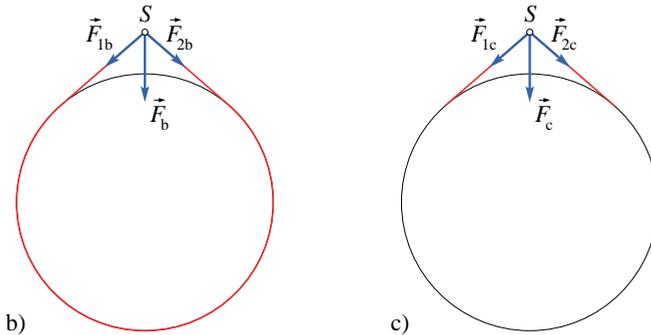
$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (11)$$

als Zugspannung ( $A = \frac{\pi}{4}d^2$  Querschnittsfläche des Seils) und

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (12)$$

als Dehnung ( $l_0$  Gesamtlänge des Seils)

$$F = \sigma A = \varepsilon EA = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot E \cdot \frac{\pi}{4}d^2. \quad (13)$$



Da das Seil nicht mit der Unterlage in Wechselwirkung tritt, müssen wir hier als Ausgangslänge den halben Erdumfang  $l_0 = \pi R$  einsetzen (Bild b) und erhalten mit (13) und den gegebenen Zahlenwerten:

$$|\mathbf{F}_{1b}| = |\mathbf{F}_{2b}| = \frac{\Delta l}{\pi R} \cdot E \cdot \frac{\pi}{4}d^2 = 7,056 \cdot 10^{-6} \text{ N}. \quad (14)$$

Schließlich ergibt vektorielle Addition von  $\mathbf{F}_{1b}$  und  $\mathbf{F}_{2b}$  den Betrag  $F_b$  der gesuchten, vertikal nach unten gerichteten Kraft:

$$F_b = 2|\mathbf{F}_{1b}| \cos(90^\circ - \varphi) = 2|\mathbf{F}_{1b}| \sin \varphi = \mathbf{8,72 \cdot 10^{-8} \text{ N}}. \quad (15)$$

c) Im Falle, dass sich nur der nicht auf der Oberfläche liegende Teil des Gummiseils dehnt (siehe Bild c) oben), gilt  $l_0 = s$  (und wie oben mit  $\Delta l = 0,5 \text{ m}$ ), also

$$|\mathbf{F}_{1c}| = |\mathbf{F}_{2c}| = \frac{\Delta l}{s} \cdot E \cdot \frac{\pi}{4}d^2 = 3,59 \cdot 10^{-3} \text{ N} \quad (16)$$

und damit

$$F_c = 2|\mathbf{F}_{1c}| \cos(90^\circ - \varphi) = 2|\mathbf{F}_{1c}| \sin \varphi = \frac{\pi R}{s} F_b = \mathbf{4,44 \cdot 10^{-5} \text{ N}}. \quad (17)$$

*Alternative Näherungslösung zu a):*

Wir haben vier Unbekannte ( $\varphi$ ,  $s$ ,  $t$  und  $h$ ), die durch die vier Gleichungen (1)–(3) und (9) berechnet werden können (bekannte Eingangsparameter sind dabei  $\Delta l$  und  $R$ ). Dies wurde oben so gelöst, dass aus (1)–(3)  $s$  und  $t$  eliminiert wurden, woraufhin eine Gleichung für  $\varphi$  (4) abgeleitet werden konnte, mit deren Lösung sich alle anderen Unbekannten bestimmen ließen.

Dies ergab sich so, weil eine exakte Elimination des Winkel  $\varphi$  wegen der Transzendenz des Ausdrucks  $\tan \varphi - \varphi$  nicht möglich ist.

Man kann aber dennoch versuchen, eine Näherungslösung zu berechnen. Da offenbar  $\varphi \ll 1$  ist, können die Ausdrücke, die  $\varphi$  enthalten in TAYLOR-Reihen entwickelt werden. Aus (4) folgt damit

$$\frac{\Delta l}{R} = \tan \varphi - \varphi = \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{2}{15}\varphi^5 + \frac{17}{315}\varphi^7 + \frac{62}{2835}\varphi^9 + \dots \quad (18)$$

Setzt man (2) in (9) ein, entsteht

$$h = \sqrt{R^2 + t^2} - R = R \left( \sqrt{1 + \frac{t^2}{R^2}} - 1 \right) = R \left( \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} - 1 \right) \quad (19)$$

$$\implies \frac{h}{R} = \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} - 1 = \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{5}{24}\varphi^4 + \frac{61}{720}\varphi^6 + \frac{277}{8064}\varphi^8 + \dots \quad (20)$$

Bricht man die Reihenentwicklungen (18) und (20) nach dem jeweils ersten Glied ab, ergibt sich

$$\frac{\Delta l}{R} \approx \frac{1}{3}\varphi^3 \quad \implies \quad \varphi^6 \approx \left( \frac{3\Delta l}{R} \right)^2 = \frac{9\Delta l^2}{R^2} \quad (21)$$

$$\frac{h'}{R} \approx \frac{1}{2}\varphi^2 \quad \implies \quad \varphi^6 \approx \left( \frac{2h'}{R} \right)^3 = \frac{8h'^3}{R^3}. \quad (22)$$

Durch Gleichsetzen von (21) und (22) gelingt es, hierbei den Winkel  $\varphi$  zu eliminieren, um so eine direkte Näherungsbeziehung zwischen  $\Delta l$  und  $h$  (hier  $h'$ ) zu erhalten:

$$h' \approx \frac{\sqrt[3]{9}}{2} R^{\frac{1}{3}} \Delta l^{\frac{2}{3}}. \quad (23)$$

Es lohnt sich die Lösungen dieser Gleichungen numerisch zu inspizieren. In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse aufgeführt (gerechnet wurde im *double-precision floating-point format* nach dem IEEE 754 Standard):

$\Delta l$ [m]	$\varphi$ [rad, nach (5)]	$h$ [m, nach (9)]	$h'$ [m, nach (23)]	$t$ [m, nach (2)]
8,0000	0,01555 35035 7889	771,53345 68862	<b>771,50545 97084</b>	99208,24583
5,0000	0,01329 81738 8766	563,98887 31148	<b>563,97391 23289</b>	84820,75306
3,1500	0,01140 00889 1846	414,47134 91593	<b>414,46326 92120</b>	72712,91712
2,0000	0,00979 82839 0662	306,17655 38668	<b>306,17214 45851</b>	62495,45476
1,2500	0,00837 74437 4656	223,81555 16060	<b>223,81319 54284</b>	53432,58622
0,8000	0,00721 94795 5412	166,21711 21100	<b>166,21581 25945</b>	46046,64060
<b>0,5000</b>	<b>0,00617 25797 3148</b>	<b>121,50519 05178</b>	<b>121,50449 60994</b>	<b>39369,21353</b>
0,3150	0,00529 15244 8223	89,29377 95324	<b>89,29340 44934</b>	33749,65815
0,2000	0,00454 80061 9313	65,96299 36023	<b>65,96278 89416</b>	29007,38350
0,1250	0,00388 84934 8256	48,21920 05953	<b>48,21909 12318</b>	24800,93643
0,0800	0,00335 10038 3891	35,81017 15874	<b>35,81011 12685</b>	21372,78248
0,0500	0,00286 50691 3476	26,17738 23714	<b>26,17735 01391</b>	18273,46094
0,0315	0,00245 61152 8902	19,23769 82309	<b>19,23768 08232</b>	15665,13481
0,0200	0,00211 10020 4384	14,21126 15742	<b>14,21125 20747</b>	13463,99104
0,0125	0,00180 48816 4764	10,38849 33647	<b>10,38848 82872</b>	11511,54765
0,0080	0,00155 54000 2709	7,71505 73973	<b>7,71505 45971</b>	9920,34937
0,0050	0,00132 98484 3227	5,63974 06189	<b>5,63973 91233</b>	8481,77830

Es ist zu erkennen, dass die obige Näherung (23) eine ausreichende Genauigkeit liefert (die fett gesetzten Dezimalstellen in der Spalte  $h'$  stimmen mit den „exakten“ Stellen der Spalte  $h$  überein).

*Bemerkung 1:*

Man kann natürlich auch nach (21, links) aus  $\Delta l$  den Winkel  $\varphi$  näherungsweise bestimmen, und dann mit der „exakten“ Gleichung (20, links) weiterrechnen. Dies ergibt

$$\varphi' \approx \sqrt[3]{\frac{3\Delta l}{R}} = 0,00617\,26110\,8911 \text{ rad} \quad (24)$$

$$h'' = R \left( \sqrt{1 + \tan^2 \varphi'} - 1 \right) = 121,50642\,50705 \text{ m.} \quad (25)$$

Interessant hieran ist, dass die einmalige Näherung (24) eine größere Abweichung  $|h'' - h| = 0,00123\text{m}$  als die zweifache Näherung (23)  $|h' - h| = 0,00069\text{m}$  zur Folge hat. Dies bestätigt die intuitive Regel, dass bei mehrfachen Reihenabbrüchen immer gleich viel Terme mitzunehmen sind.

*Bemerkung 2:*

Einige Teilnehmende haben die Aufgabenstellung leider missverstanden und sie mit dem bekannten Problem verwechselt, dass das Seil *über dem gesamten Erdumfang* angehoben und dabei um einen Meter verlängert wird. Das führt nach viel kürzerer Rechnung auf einen Abstand von  $\frac{1}{2\pi}$  m  $\approx 0,16$  m. Hierbei wäre aber das Problem aufgetreten, dass in einem (wegen der Kreissymmetrie beliebig wählbaren) Punkt  $S$  im Seil beide angreifenden Kräfte in *tangentialer* (und entgegengesetzter) Richtung wirken würden und es somit gar keine Kraft senkrecht zur Erdoberfläche gerichtet gäbe. Dies hätte in diesem Fall ein Hinweis auf ein Missverständnis sein können.

Punktverteilung:

- a) 0,6 Punkte für die gesuchte Höhe nach (9) oder (23)
- b) 0,2 Punkte für die Kraft (15)
- c) 0,2 Punkte für die Kraft (17)
- 0,1 Punkte für (13), unabhängig davon, ob die Ergebnisse in b) oder c) richtig sind