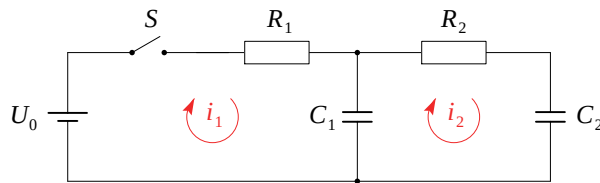


### Lösung:

Im Gegensatz zu den meisten anderen Aufgaben im Physikmarathon soll mit dieser ein Sachverhalt *gezeigt* oder *bewiesen* werden. Dazu ist eine Beweisidee nötig, die hier zu Beginn kurz vorgestellt werden soll. Lineare Netzwerke, die ausschließlich aus Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten aufgebaut sind, führen, wenn sie zeitabhängig untersucht werden, immer auf ein oder mehrere *lineare* Differenzialgleichungen (DGLen). Die Lösungsfunktionen derartiger DGLen sind stets Exponentialfunktionen, in denen die Zeit  $t$  mit einem Parameter  $\lambda$  im Exponenten steht. Der Lösungsformalismus führt dann auf eine sog. *charakteristische Gleichung* in  $\lambda$ , die hier eine quadratische Gleichung ist, weil die DGLen 2. Ordnung sind. Quadratische Gleichungen haben immer zwei Lösungen, die reell oder komplex sein können. Exponentialfunktionen mit reellem  $\lambda$ , also  $e^{\pm\lambda t}$ , auch keine Linearkombinationen davon, sind niemals periodische Funktionen (wie sie bei Schwingungen auftreten). Ist der Exponent allerdings komplex, können die Funktionen dank EULERS Relation  $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$  immer in Sinus- bzw. Kosinusfunktionen umgeschrieben werden, die typischerweise bei Schwingungen auftreten. – Es muss bei dieser Aufgabe also die quadratische charakteristische Gleichung aufgestellt werden und anhand derer nachgewiesen werden, dass die Diskriminante stets positiv ist. Damit wäre der Beweis erbracht.

### Beweis:

Zur Analyse des Netzwerkes verwenden wir das *Maschenstromverfahren* [1]. Dazu führen wir zwei Ströme,  $i_1(t)$  und  $i_2(t)$ , die innerhalb der linken bzw. rechten Masche fließen, ein. Diese beiden Ströme sind die Unbekannten in der folgenden Rechnung. Durch den Einschaltvorgang, der durch das augenblickliche Schließen des Schalters bedingt ist, sind beide Ströme selbstverständlich zeitabhängig<sup>†</sup>. Das folgende Bild zeigt das Netzwerk:



Es müssen nun die beiden Maschengleichungen aufgestellt werden. Nach der KIRCHHOFFSchen Maschenregel muss die Summe der Spannungsabfälle über allen in der Masche vorhandenen Bauelementen gleich der Summe der Quellspannungen sein. Dabei ist der Spannungsabfall über einem OHMSchen Widerstand  $R$  gleich dem Produkt  $u = Ri$  und der über einem Kondensator gleich  $u = \frac{1}{C} \int i dt$ , wenn  $i$  der jeweilige Maschenstrom ist. Die Gleichungen lauten<sup>‡</sup>:

$$R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt - \frac{1}{C_1} \int i_2 dt = U_0 \quad (1)$$

$$-\frac{1}{C_1} \int i_1 dt + R_2 i_2 + \frac{1}{C_1} \int i_2 dt + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = 0. \quad (2)$$

Nun sind zeitabhängige Integrale wie in (1) und (2) ziemlich unhandlich. Man hilft sich, indem

---

<sup>†</sup>Wir verwenden die übliche Notation, dass *zeitabhängige* elektrische Größen, also Ströme  $i(t)$ , Spannungen  $u(t)$ , Ladungen  $q(t)$  usw. immer mit Kleinbuchstaben bezeichnet werden, konstante (Gleich-)Ströme, -spannungen oder Amplituden dieser Größen stets mit Großbuchstaben.

<sup>‡</sup>In [1, S. 47] ist sehr gut beschrieben, warum die Gleichungen genau so lauten.

diese Gleichungen einmal nach der Zeit differenziert werden\*:

$$R_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_1} i_1 - \frac{1}{C_1} i_2 = 0 \quad (3)$$

$$-\frac{1}{C_1} i_1 + R_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_1} i_2 + \frac{1}{C_2} i_2 = 0. \quad (4)$$

Die Gleichungen (3) und (4) bilden nun ein gekoppeltes lineares DGL-System für die Ströme  $i_1(t)$  und  $i_2(t)$ . „Gekoppelt“ bedeutet, dass beide Funktionen in beiden Gleichungen auftreten.

Wir können es aber einfach „entkoppeln“, indem wir z. B. (3) nach  $i_2$  umstellen, also

$$i_2 = i_1 + R_1 C_1 \frac{di_1}{dt}, \quad (5)$$

und (5) in (4) einsetzen („Einsetzungsverfahren“):

$$-\frac{1}{C_1} i_1 + R_2 \frac{d}{dt} \left( i_1 + R_1 C_1 \frac{di_1}{dt} \right) + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \left( i_1 + R_1 C_1 \frac{di_1}{dt} \right) = 0 \quad (6)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{C_1} i_1 + R_2 \frac{di_1}{dt} + R_1 R_2 C_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{1}{C_1} i_1 + \frac{1}{C_2} i_1 + \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) R_1 C_1 \frac{di_1}{dt} = 0 \quad (7)$$

$$\Rightarrow R_1 R_2 C_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left( R_1 + R_2 + \frac{R_1 C_1}{C_2} \right) \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C_2} i_1 = 0 \quad (8)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} i_1 = 0. \quad (9)$$

Gleichung (9) ist eine lineare, homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Ein Ansatz der Form  $i_1(t) = e^{\lambda t}$  führt auf die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) \lambda + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} = 0. \quad (10)$$

Die Diskriminante  $D$  dieser quadratischen Gleichung lautet:

$$D = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right)^2 - \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_2} \right)^2 + \frac{1}{2 R_2 C_1} \left( \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2} \right) + \frac{1}{4 R_2^2 C_1^2} > 0. \quad (12)$$

Diese Summe dreier Summanden ist stets positiv, unabhängig davon, wie groß die Widerstände  $R_1, R_2$  und Kapazitäten  $C_1, C_2$  sind. Somit gibt es nur reelle Lösungen von (10). Ein ähnliches Ergebnis erhält man, wenn anstelle von  $i_2$  der Strom  $i_1$  aus (3) und (4) eliminiert wird.

Die Behauptung ist daher mit den einleitenden Bemerkungen oben bewiesen.  $\square$

## Literatur

[1] G. HAGMANN: „Grundlagen der Elektrotechnik“, 16. Aufl., AULA-Verlag, Wiebelsheim, Abschnitt 2.2.6, S. 45ff.

## Punktverteilung:

- 1,0 Punkte für die richtige Ungleichung (12)

---

\*Von den unbestimmten Integralen, die eine Funktion ihrer oberen Grenzen sind, bleiben nach dem Differenzieren nur noch ihre Stammfunktionen, hier also  $i_1$  bzw.  $i_2$  übrig.