Lösung:

Die Staubmasse Δm, die in der Zeit Δt auf dem Raumschiff haften bleibt, ist durch die Staubdichte ϱ und das durchströmte (Zylinder-)Volumen $\Delta V = A\,\Delta s = \pi r^2\,\Delta s$ gegeben:

$$\Delta m = \varrho\,\Delta V = \varrho\pi r^2\,\Delta s, \tag{2}$$

sodass nach Division durch Δt für die Konstante

$$\beta = \varrho\pi r^2 = 3{,}927 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{kg\,m^{-1}} \tag{3}$$

folgt. Da keine äußeren Kräfte wirken, gilt der Impulserhaltungssatz:

$$m_0 v_0 = m(t)v(t). \tag{4}$$

Differenzieren wir diesen einmal nach der Zeit und setzen darin (1) ein, ergibt sich

$$0 = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v(t) + m(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \beta v^2 + ma,$$

oder, umgestellt nach der Beschleunigung a und mit $m = \frac{m_0 v_0}{v}$ nach (4),

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\beta\frac{v^2}{m} = -\frac{\beta}{m_0 v_0}v^3. \tag{5}$$

Gleichung (5) stellt eine Differenzialgleichung 1. Ordnung für die Funktion $v = v(t)$ dar, die mittels Trennung der Veränderlichen gelöst werden kann:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^3} = -\frac{\beta}{m_0 v_0}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^3} = -\frac{1}{2v^2}\bigg|_{v_0}^{v} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_0^2}\right) = -\frac{\beta}{m_0 v_0}\int_0^t \mathrm{d}t = -\frac{\beta}{m_0 v_0}t.$$

Daraus folgt schließlich

$$t = \frac{m_0 v_0}{\beta}\,\frac{1}{2v_0^2}\left(\frac{v_0^2}{v^2} - 1\right) = \mathbf{189{,}3 \cdot 10^6\ a}. \tag{6}$$

Bemerkungen:

1. Die anfängliche kinetische Energie des Raumschiffs $E_{\mathrm{kin},0} = \frac{m_0}{2}v_0^2$ bleibt hier *nicht* erhalten, denn nach (4) gilt:

$$E_{\mathrm{kin}}(t) = \frac{1}{2}m(t)v^2(t) = \frac{1}{2}\,\frac{m_0 v_0}{v}\,v^2 = \frac{1}{2}m_0 v_0 v < \frac{1}{2}m_0 v_0^2 = E_{\mathrm{kin},0}.$$

Da $v(t)$ während des Fluges ständig kleiner wird, nimmt die kinetische Energie stetig ab. Physikalisch gesehen erfolgen ständig kleine unelastische Stöße mit den Staubpartikeln, sodass Energieerhaltung hier nicht gelten kann.

2. Aus (6) folgt weiterhin, dass das Raumschiff in endlicher Zeit nicht zum Stillstand kommt ($v \to 0$ nur für $t \to \infty$).

Punktverteilung:

- 1,0 Punkte für die vollständig richtige Lösung (6)
  (eine genauere Punkteverteilung ist evtl. erst in der Woche möglich)