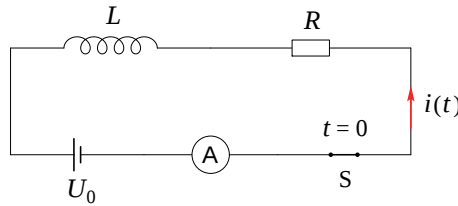


Lösung:



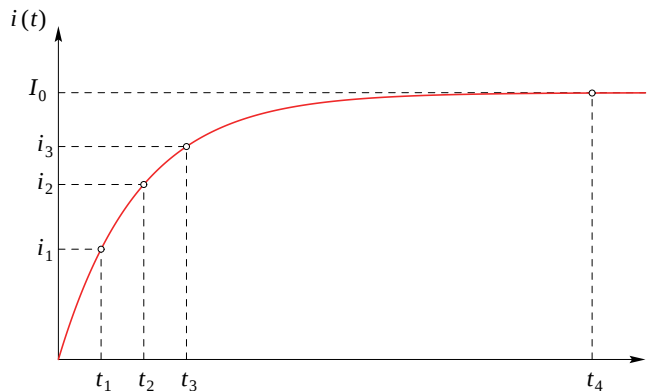
Nach Einschalten des Stromkreises (siehe obiges Bild) steigt die Stromstärke gemäß der Funktion

$$i(t) = I_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (1)$$

an.[†] Dabei ist

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (2)$$

die Zeitkonstante der RL -Reihenschaltung. Die Funktion (1) sieht in einem Stromstärke-Zeit-Diagramm wie folgt aus:



Da $t_4 \gg t_3$ vorausgesetzt wurde, können wir annehmen, dass mit guter Näherung $I_0 \approx i_4$ gilt. Wir erhalten nach (1) nun mit den Messwerten folgende Gleichungen:

$$i_1 = i_4 \left(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}} \right) \quad \Rightarrow \quad \ln \left(1 - \frac{i_1}{i_4} \right) = -\frac{1}{\tau} t_1 \quad (3)$$

$$i_2 = i_4 \left(1 - e^{-\frac{t_2}{\tau}} \right) \quad \Rightarrow \quad \ln \left(1 - \frac{i_2}{i_4} \right) = -\frac{1}{\tau} t_2 \quad (4)$$

$$i_3 = i_4 \left(1 - e^{-\frac{t_3}{\tau}} \right) \quad \Rightarrow \quad \ln \left(1 - \frac{i_3}{i_4} \right) = -\frac{1}{\tau} t_3. \quad (5)$$

Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten, „bestmögliche“ Werte für τ auszurechnen.

a) Wir rechnen aus (3) bis (5) drei unterschiedliche Werte für die Zeitkonstante (hier τ_1 , τ_2 , τ_3 genannt) aus:

$$\tau_1 = -\frac{t_1}{\ln \left(1 - \frac{i_1}{i_4} \right)} = 23,21 \mu\text{s} \quad \text{und analog} \quad \tau_2 = 22,84 \mu\text{s}, \quad \tau_3 = 23,24 \mu\text{s}. \quad (6)$$

[†]Dies herzuleiten ist eine Extraaufgabe; für die Lösung der vorliegenden Aufgabe kann (1) sofort benutzt werden.

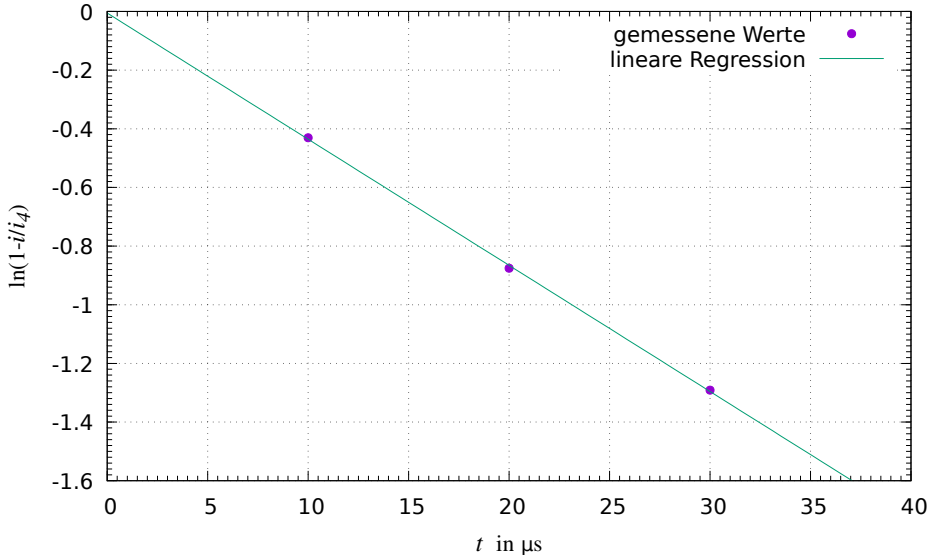
Aus diesen drei Werten kann der arithmetische Mittelwert berechnet werden:

$$\bar{\tau} = 23,1 \mu\text{s} \quad (7)$$

und daraus schließlich mit (2)

$$\bar{L} = \bar{\tau}R = \mathbf{9,01 \text{ mH} \approx 9 \text{ mH}}. \quad (8)$$

b) Oder wir tragen $\ln\left(1 - \frac{i}{i_4}\right)$ über t in einem Diagramm auf, welches nach (3) bis (5) eine lineare Funktion ergeben muss:



Da es sich hier um (mit Messunsicherheiten behaftete) Messwerte handelt, liegen die drei Punkte nicht exakt auf einer Geraden, sodass eine *lineare Regression* angebracht ist. Diese ergibt als Anstieg

$$-\frac{1}{\tau} = -0,043 \mu\text{s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \tau = 23,25 \mu\text{s} \quad (9)$$

und daraus mit (2)

$$L = \tau R = \mathbf{9,07 \text{ mH} \approx 9 \text{ mH}}. \quad (10)$$

Bemerkung:

Dadurch, dass I_0 mit i_4 praktisch vorgegeben wurde, ist die vorliegende Aufgabe etwas vereinfacht worden. Wir könnten auf die vierte Messung $i_4 \approx I_0$ nach sehr langer Zeit nach dem Einschalten auch verzichten, welches allerdings zu deutlich höherem Aufwand führt. Dann haben wir es nämlich nicht mehr mit einem *quasilinearen Fit* wie in (3) zu tun, sondern müssen I_0 noch zusätzlich anfitten. Die Regression würde dann etwa allgemein so aussehen:

Nichtlinearer Fit: Angenommen, es liegen Wertepaare (x_i, y_i) für $i = 1, 2, \dots, n$ vor, zwischen denen ein Zusammenhang gemäß einer Exponentialfunktion mit Offset a_0

$$y(x) = a_0 + a_1 e^{a_2 x} \quad (11)$$

besteht oder vermutet wird. Die y_i werden dabei als Messwerte betrachtet, während die x_i als exakt bekannt angenommen werden. Dann liefert der LEVENBERG-MARQUARDT-Algorithmus [1] gute Schätzwerte $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2$ für die Parameter der obigen Verteilung (11).

Die praktische Durchführung dieses nichtlinearen Fits wird stark von der Wahl der Startwerte der Parameter a_0 , a_1 und a_2 beeinflusst. Um diese zu erhalten, wird (11) einmal differenziert:

$$y' = a_2 a_1 e^{a_2 x} = a_2 (y - a_0). \quad (12)$$

Hat man nun zwei Approximationen der ersten Ableitung (etwa durch einfach zu berechnende Differenzenquotienten), lässt sich das entstehende Gleichungssystem für a_0 und a_2 leicht auflösen:

$$\begin{aligned} d_k &:= \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \approx y'_k = a_2 (y_k - a_0) \\ d_l &:= \frac{y_{l+1} - y_l}{x_{l+1} - x_l} \approx y'_l = a_2 (y_l - a_0) \\ \implies a_0 &= \frac{d_k y_l - d_l y_k}{d_k - d_l}, \quad a_2 = \frac{d_k}{y_k - a_0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Die Indizes $k, l \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $k \neq l$ werden dabei so bestimmt, dass die Differenz $d_k - d_l$ im Nenner von (13) nicht verschwindet. Einen Startwert für den Parameter a_1 erhält man schließlich z. B. durch

$$a_1 = (y_k - a_0) e^{-a_2 x_k}. \quad (14)$$

Das Online-Tool <http://hydra.ovgu.de> führt diese Regression durch und liefert als Parameter

$$i(t) = 11,33 \text{ mA} \left(1 - 1,036 e^{-0,049899 \text{ } \mu\text{s}^{-1} \cdot t} \right) \quad (15)$$

zurück, also $I_0 \approx 11,5 \text{ mA}$ und $\tau \approx 20,0 \text{ } \mu\text{s}$. Im Vergleich zu den vorgegebenen $I_0 = 12 \text{ mA}$ und (7) bzw. (9) ist dieses Ergebnis für nur drei Messwerte akzeptabel.

Literatur

[1] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery: „Numerical Recipes in C“, Cambridge University Press, 1993, S. 685-686.

Punktverteilung:

- 0,2 Punkte für (1)
- 0,2 Punkte für (2)
- die restlichen 0,6 Punkte für das Ergebnis (8) oder (10)