Lösung:

Wir nehmen o. B. d. A. an, dass der Abwurfort im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems liegt. Die Abwurfgeschwindigkeit sei v_0. Dann gilt für den Ortsvektor des Steins

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 t \cos\alpha \\ -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t \sin\alpha \end{pmatrix} \tag{1}$$

und für seine Geschwindigkeit

$$\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ -gt + v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Der Stein entfernt sich vom Abwurfort, wenn $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} > 0$ gilt, denn dann ist der Winkel zwischen $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{v}$ kleiner als $90\,^\circ$ („$\boldsymbol{v}$ zeigt noch in Richtung von $\boldsymbol{r}$“). Ist dagegen $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = 0$ bleibt die Entfernung konstant, und für $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} < 0$ nähert sich der Stein dem Ursprung.

Zu Beginn des schiefen Wurfes gilt stets $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} > 0$. Wir betrachten also den Fall $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = 0$, nach dem die Entfernung eventuell wieder abnimmt. Mit (1) und (2) ergibt sich:

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = v_0^2 t - \frac{3}{2} g v_0 t^2 \sin\alpha + \frac{1}{2} g^2 t^3 = 0 \tag{3}$$

$$\Longrightarrow \quad t^2 - \frac{3v_0 \sin\alpha}{g} t + \frac{2v_0^2}{g^2} = 0 \tag{4}$$

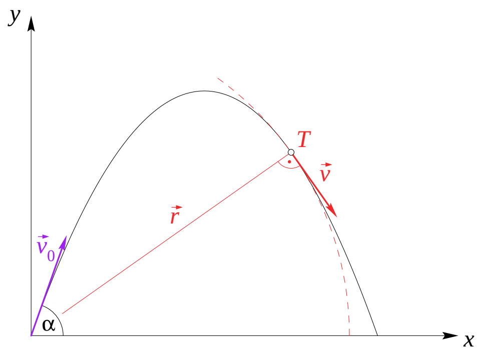
$$\Longrightarrow \quad t_{1,2} = \frac{3v_0\sin\alpha}{2g} \pm \sqrt{\frac{9v_0^2\sin^2\alpha}{4g^2} - \frac{2v_0^2}{g^2}} \tag{5}$$

Dieser Fall tritt *nicht* ein, wenn der Radikant unter der Wurzel negativ wird:

$$\frac{9v_0^2\sin^2\alpha}{4g^2} < \frac{2v_0^2}{g^2} \tag{6}$$

$$\Longrightarrow \quad \sin\alpha < \frac{\sqrt{8}}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{\alpha < 70{,}528779\,^\circ}. \tag{7}$$

Das bedeutet, dass sich der Stein für Abwurfwinkel $\alpha < 70{,}528779\,^\circ$ stetig vom Abwurfort entfernt. Der Grenzfall $\alpha = 70{,}528779\,^\circ$ ist im folgenden Bild dargestellt:



Im Punkt T ist die Bedingung $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{v}$ genau erfüllt. In diesem Punkt behält er seine momentane Entfernung bei. Es ist zu erkennen, dass die Wurfparabel für größere Zeiten oberhalb des Kreisbogens liegt, der Stein sich also wieder vom Ursprung entfernt.

Alternative Lösung:
Wird die Aufgabenstellung wörtlich genommen, kann auch die Entfernung $|\boldsymbol{r}(t)|$ vom Abwurfort in Abhängigkeit von der Zeit betrachtet werden. Aus (1) folgt:

$$|\boldsymbol{r}(t)| = \frac{gt}{2}\sqrt{t^2 - \frac{4v_0\sin\alpha}{g}t + \frac{4v_0^2}{g^2}} \tag{8}$$

$$= \frac{gt}{2}\sqrt{\left(t - \frac{2v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{4v_0^2}{g^2}\cos^2\alpha}. \tag{9}$$

Die erste Ableitung von (9) nach der Zeit,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{r}(t)| = \frac{g}{2}\sqrt{\left(t - \frac{2v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{4v_0^2}{g^2}\cos^2\alpha} + \frac{gt}{2}\cdot\frac{t - \frac{2v_0\sin\alpha}{g}}{\sqrt{\left(t - \frac{2v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{4v_0^2}{g^2}\cos^2\alpha}} \tag{10}$$

$$= g\,\frac{t^2 - \frac{3v_0\sin\alpha}{g}t + \frac{2v_0^2}{g^2}}{\sqrt{\left(t - \frac{2v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{4v_0^2}{g^2}\cos^2\alpha}} = g\,\frac{\left(t - \frac{3v_0\sin\alpha}{2g}\right)^2 + \frac{v_0^2}{4g^2}(8 - 9\sin^2\alpha)}{\sqrt{\left(t - \frac{2v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{4v_0^2}{g^2}\cos^2\alpha}}, \tag{11}$$

kann als „Radialgeschwindigkeit“ (gegenüber dem festen Abwurfort) betrachtet werden. Ist sie null, entspricht das gerade dem obigen Fall in (5). Dazu muss der Zähler in (11) verschwinden. Das geht nur für

$$t = \frac{3v_0\sin\alpha}{2g} \qquad \text{und} \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}. \tag{12}$$

Das Ergebnis ist hier also dasselbe wie oben.

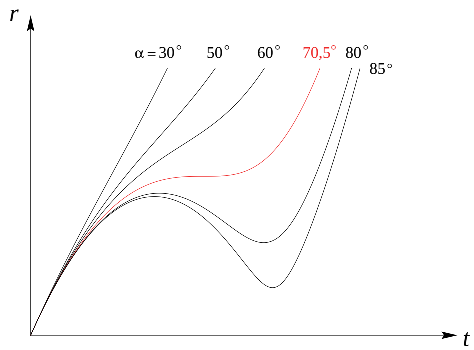
Es ist an dieser Stelle eine gute Idee, ein Diagramm für $|\boldsymbol{r}(t)|$ für verschiedene Abwurfwinkel α zu betrachten. Um (9) noch etwas zu vereinfachen, ersetzen wir die Anfangsgeschwindigkeit v_0 durch eine andere Konstante, nämlich eine feste Zeit τ, über die Beziehung

$$v_0 = \frac{g\tau}{2}, \tag{13}$$

wodurch sich (9) als

$$|\boldsymbol{r}(t)| = \frac{g}{2}t\sqrt{t^2 - 2\tau\sin\alpha\cdot t + \tau^2} \tag{14}$$

schreibt. Das Diagramm ist im folgenden Bild zu sehen:



Die rot eingezeichnete Kurve beschreibt die oben gefundene Lösung der Aufgabe. Es ist deutlich zu erkennen, dass sie kein Extremum an der fraglichen Stelle hat, sondern einen *Horizontalwendepunkt*. Für Winkel $\alpha > 70{,}5\,^\circ$ gibt es tatsächlich einen Zeitbereich, in dem die Radialgeschwindigkeit negativ ist, d. h. der Stein sich wieder dem Abwurfort nähert.

Punktverteilung:

- 1,0 Punkte für die richtige Bedingung (7)
- 0,0 Punkte, wenn die Aufgabe missverstanden wurde in dem Sinne, dass nach der größten Wurfweite gefragt wurde und 45° als Lösung angegeben wurde