

Lösung:

Die vorgegebene Differenzialgleichung kann mit Trennung der Veränderlichen gelöst werden:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \implies \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} v^2 \implies dt = \frac{dv}{g - \frac{k}{m} v^2}. \quad (1)$$

Integration ergibt

$$\int_0^t d\tau = t = \int_0^v \frac{du}{g - \left(\sqrt{\frac{k}{m}} u\right)^2} = \frac{1}{g} \int_0^v \frac{du}{1 - \left(\sqrt{\frac{k}{mg}} u\right)^2}, \quad (2)$$

wobei t die Fallzeit und v die Geschwindigkeit zur Zeit t bezeichnen (die Integrationsvariablen wurden hier durch τ und u ersetzt, damit sie nicht mit den Integrationsgrenzen verwechselt werden). Das Integral auf der rechten Seite von (2) kennt heutzutage üblicherweise ein Programm wie WolframAlpha[®]; wir zeigen hier den klassischen Weg zur Berechnung mit Substitution und Partialbruchzerlegung.

Zunächst wird u durch

$$z = \sqrt{\frac{k}{mg}} u, \quad du = \sqrt{\frac{mg}{k}} dz \quad (3)$$

substituiert; aus (2) wird damit (wobei $z' = \sqrt{\frac{k}{mg}} v$ die neue obere Grenze ist)

$$t = \sqrt{\frac{m}{gk}} \int_0^{z'} \frac{dz}{1 - z^2} = \sqrt{\frac{m}{gk}} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{z'} \left(\frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} \right) dz \quad (4)$$

$$= \sqrt{\frac{m}{gk}} \cdot \frac{1}{2} (\ln(1+z') - \ln(1-z')) = \sqrt{\frac{m}{gk}} \cdot \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+z'}{1-z'} \right) \equiv \sqrt{\frac{m}{gk}} \operatorname{artanh}(z') \quad (5)$$

und nach Rücksubstitution

$$t = \sqrt{\frac{m}{gk}} \operatorname{artanh} \left(\sqrt{\frac{k}{mg}} v \right). \quad (6)$$

Die gegebene Anfangsbedingung $v(0) = 0$ ist hierin bereits erfüllt. Eine mögliche Fortsetzung besteht nun darin, (6) nach der Geschwindigkeit v aufzulösen, also

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh \left(\sqrt{\frac{gk}{m}} t \right), \quad (7)$$

und zu zeigen, dass – für jede feste positive Zeit t – die Geschwindigkeit $v(t)$ eine monoton wachsende Funktion der Masse m ist, woraus folgt, dass die Fallzeit mit der Masse abnimmt. Wir verfolgen hier den Weg, die Fallzeit t selbst zu untersuchen.

Dazu berechnen wir den zurückgelegten Weg $s(t)$ durch Integration von (7) über t :

$$s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = \sqrt{\frac{mg}{k}} \int_0^t \tanh \left(\sqrt{\frac{gk}{m}} \tau \right) d\tau, \quad (8)$$

wobei als Anfangsbedingung $s(0) = 0$ genommen wurde. Für die folgende Betrachtung setzen wir $s(t) = s(t(m)) = h$ als eine feste Größe, nämlich eine konstante Fallhöhe h , voraus. Die

dafür erforderliche Fallzeit $t(m)$ ist nun unsere Zielfunktion, die auf Monotonie zu untersuchen ist. Aus (8) folgt damit:

$$h = \sqrt{\frac{mg}{k}} \int_0^{t(m)} \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}} \tau\right) d\tau = \sqrt{\frac{mg}{k}} \int_0^{t(m)} \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}} \tau\right)}{\cosh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}} \tau\right)} d\tau \quad (9)$$

Der Integrand in (9) ist vom Typ $\frac{f'(x)}{f(x)}$, sodass die Stammfunktion $\ln(f(x))$ lautet. Wir erhalten somit

$$h = \frac{m}{k} \ln\left(\cosh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}} t(m)\right)\right) \quad (10)$$

und haben das „Glück“, (10) explizit nach $t(m)$ auflösen zu können:

$$t(m) = \sqrt{\frac{m}{gk}} \operatorname{arcosh}\left(e^{\frac{kh}{m}}\right). \quad (11)$$

Es verbleibt mithin zu zeigen, dass $t(m)$ eine monoton fallende Funktion ist. Dazu bilden wir die erste Ableitung (nach der Produktregel), die für alle $m > 0$ negativ sein muss:

$$\frac{d}{dm} t(m) = \frac{1}{2\sqrt{gkm}} \operatorname{arcosh}\left(e^{\frac{kh}{m}}\right) + \sqrt{\frac{m}{gk}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2kh}{m}} - 1}} \cdot e^{\frac{kh}{m}} \cdot \left(-\frac{kh}{m^2}\right) < 0 \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{arcosh}\left(e^{\frac{kh}{m}}\right) < \frac{2kh}{m} \frac{e^{\frac{kh}{m}}}{\sqrt{e^{\frac{2kh}{m}} - 1}}. \quad (13)$$

Die Substitution

$$w = e^{\frac{kh}{m}} \quad (14)$$

vereinfacht diese Ungleichung zu

$$\operatorname{arcosh}(w) < \frac{2w \ln w}{\sqrt{w^2 - 1}}, \quad \text{für alle } w > 1. \quad (15)$$

Mit der nochmaligen Substitution $w = \cosh y$ ist (15) äquivalent zu

$$y < 2 \ln(\cosh y) \cdot \frac{\cosh y}{\sinh y} \quad (16)$$

$$\Leftrightarrow y \tanh y < 2 \ln(\cosh y), \quad \text{für alle } y > 0. \quad (17)$$

Da Ungleichung (17) für $y = 0$ zur Gleichung wird, ist sie wahr, wenn die ersten Ableitungen auf der linken und rechten Seite dieselbe Relation erfüllen, d. h., wenn

$$\tanh y + y \frac{1}{\cosh^2 y} < 2 \tanh y \quad (18)$$

gilt, oder dazu äquivalent

$$y < \cosh y \sinh y, \quad \text{für alle } y > 0 \quad (19)$$

$$\Leftrightarrow 2y < \sinh 2y, \quad \text{für alle } y > 0. \quad (20)$$

Die letzte Ungleichung (20) ist offenbar richtig, wenn wir die Taylorreihe von $\sinh 2y$, nämlich

$$\sinh 2y = 2y + \frac{(2y)^3}{3!} + \frac{(2y)^5}{5!} + \dots, \quad (21)$$

betrachten. Damit ist die Behauptung (12) bewiesen. $\square$

Punktverteilung:

- 0,4 Punkte für (6) oder (7)
- 0,3 Punkte für (10) oder (11)
- 0,3 Punkte für die restlichen Schritte, um (12) oder (13) lückenlos zu zeigen