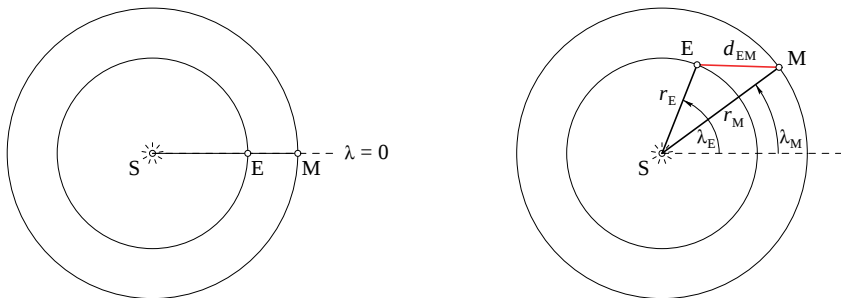


Lösung:

Nach dem 3. KEPLERSchen Gesetz liegt mit dem Verhältnis der Umlaufzeiten beider Planeten auch das Verhältnis der Bahnradien fest:

$$\frac{T_M^2}{T_E^2} = \left(\frac{32}{17}\right)^2 = \frac{r_M^3}{r_E^3} \quad \Rightarrow \quad r_M = r_E \left(\frac{32}{17}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,5245232 \text{ AE.} \quad (1)$$

Zur Zeit $t = 0$ steht Mars in Opposition zur Sonne, d. h., alle drei Himmelskörper befinden sich auf einer Geraden mit der Erde zwischen Sonne und Mars, siehe nachfolgendes Bild links. O. B. d. A. hat diese Gerade die heliozentrische Länge $\lambda = 0$.



Zu einer Zeit $t > 0$ sind die Erde um einen Winkel (heliozentrische Länge)

$$\lambda_E(t) = \omega_E t \quad (2)$$

und der Mars um einen Winkel

$$\lambda_M(t) = \omega_M t \quad (3)$$

auf ihren Umlaufbahnen vorangeschritten mit den Winkelgeschwindigkeiten

$$\omega_E = \frac{2\pi}{T_E} \quad \text{und} \quad \omega_M = \frac{2\pi}{T_M} \quad (4)$$

(s. obiges Bild rechts). Ihr gegenseitiger Abstand beträgt nach dem Kosinussatz

$$d_{EM}(t) = \sqrt{r_E^2 + r_M^2 - 2r_E r_M \cos(\lambda_E - \lambda_M)} \quad (5)$$

$$= \sqrt{r_E^2 + r_M^2 - 2r_E r_M \cos(\omega_E - \omega_M)t}. \quad (6)$$

Für das Argument der Kosinusfunktion in (6) können wir mit (4) einfacher schreiben:

$$(\omega_E - \omega_M)t = 2\pi \left(\frac{1}{T_E} - \frac{1}{T_M} \right) t = 2\pi \frac{t}{T_E} \left(1 - \frac{T_E}{T_M} \right) = \frac{15\pi}{16} \frac{t}{T_E}. \quad (7)$$

Damit geht die Abstandsfunktion d_{EM} über in

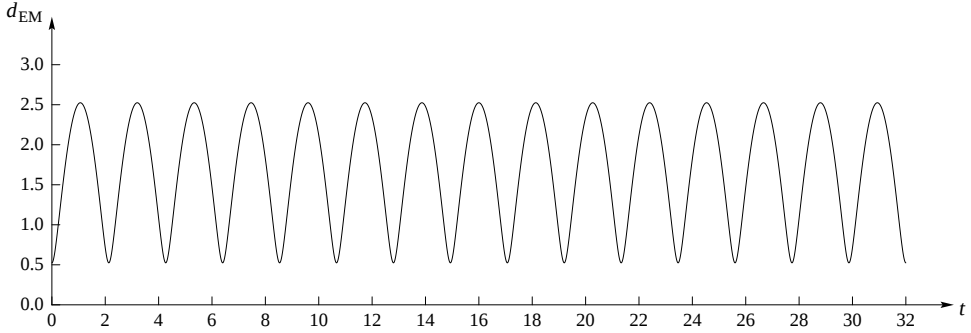
$$d_{EM}(t) = r_E \sqrt{1 + \left(\frac{32}{17}\right)^{\frac{4}{3}} - 2 \left(\frac{32}{17}\right)^{\frac{2}{3}} \cos\left(\frac{15\pi}{16} \frac{t}{T_E}\right)} = r_E \sqrt{a - b \cos(ct)}, \quad (8)$$

worin noch zur Abkürzung die Konstanten

$$a = 1 + \left(\frac{32}{17}\right)^{\frac{4}{3}}, \quad b = 2 \left(\frac{32}{17}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad c = \frac{15\pi}{16T_E} \quad (9)$$

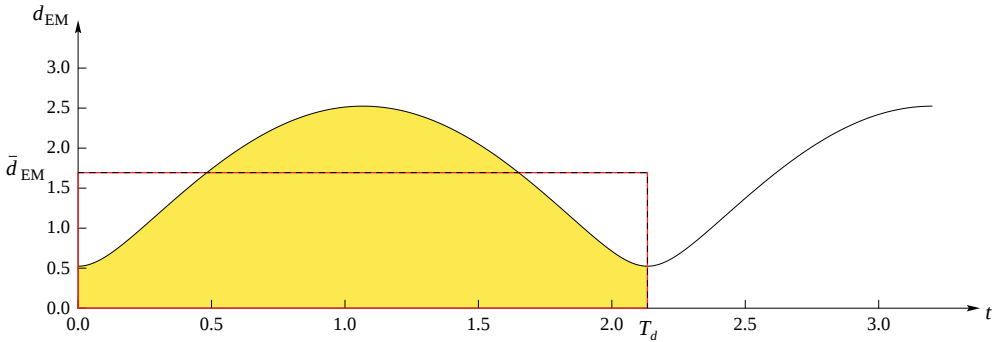
eingeführt werden.

Der Graph der Funktion ist im folgenden Diagramm zu sehen (Zeit t in siderischen Jahren, Abstand d_{EM} in AE):



Wir erkennen, dass der minimale Abstand (Mars in Opposition zur Sonne) $r_M - r_E \approx 0,52$ AE und der maximale Abstand (Mars in Konjunktion zur Sonne) $r_M + r_E \approx 2,52$ AE beträgt. Außerdem ändert sich der Abstand in Opposition schneller als zur Konjunktion (die unteren Bögen sind schmaler als die oberen Bögen).

Wichtig für die nachfolgenden Rechnungen ist die Tatsache, dass die Funktion wegen der Kosinusfunktion unter der Wurzel in (6) *periodisch* ist. Dies hat die Vereinfachung zur Folge, dass nicht über einen langen Zeitraum integriert werden muss um den Mittelwert zu berechnen, sondern dass es genügt, über *exakt eine* Periodendauer T_d zu integrieren. Anschaulich bedeutet dies, dass die Fläche unter der Kurve (im folgenden Bild gelb gefärbt) durch eine Rechteckfläche (roter Kasten) ersetzt wird:



Die Periodendauer T_d ergibt sich, indem das Argument der Kosinusfunktion, also (7), gleich 2π gesetzt wird:

$$\frac{15\pi}{16} \frac{T_d}{T_E} = 2\pi \quad \Longrightarrow \quad T_d = \frac{32}{15} T_E = 2,1\bar{3} T_E. \quad (10)$$

Setzen wir dies in (2) und (3) ein, ergeben sich die heliozentrischen Längen von Erde und Mars zum Zeitpunkt $t = T_d$ zu

$$\lambda_E(T_d) = \omega_E T_d = \frac{32}{15} \omega_E T_E = \frac{32}{15} \cdot 2\pi \equiv 768^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 48^\circ, \quad (11)$$

$$\lambda_M(T_d) = \omega_M T_d = \frac{32}{15} \omega_M T_E = \frac{32}{15} \frac{T_E}{T_M} \cdot 2\pi = \frac{17}{15} \cdot 2\pi \equiv 408^\circ = 1 \cdot 360^\circ + 48^\circ. \quad (12)$$

Die nächste Opposition ereignet sich also nach zwei Sonnenumrundungen der Erde plus 48° , währenddessen Mars eine Sonnenumrundung plus 48° zurückgelegt hat.

Der gesuchte mittlere Abstand $\bar{d}_{\text{EM}}$ schreibt sich mit (8), (9) und (10) als

$$\bar{d}_{\text{EM}} = \frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} r_E \sqrt{a - b \cos(ct)} dt = \frac{r_E}{T_d} \int_0^{T_d} \sqrt{a - b \cos(ct)} dt. \quad (13)$$

Wir substituieren noch $x = ct$, $dx = c dt$, wodurch (13) mit $cT_d = 2\pi$ übergeht in

$$\bar{d}_{\text{EM}} = \frac{r_E}{cT_d} \int_0^{cT_d} \sqrt{a - b \cos x} dx = \frac{r_E}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{a - b \cos x} dx. \quad (14)$$

Das Integral (14) ist nun leider keines, welches mit den aus dem Schulunterricht bekannten Funktionen gelöst werden kann. Deshalb bietet es sich hier an, den Integralwert direkt durch numerische Integration (numerische Quadratur) zu berechnen.

Streifenmethode: Der Flächeninhalt unter der Kurve wird angenähert durch eine endliche Summe von n senkrechten, rechteckigen Streifen der (konstanten) Breite

$$h = \frac{2\pi}{n}, \quad (15)$$

d. h., das Integrationsintervall $[0, 2\pi]$ wird in n äquidistante Teilintervalle unterteilt. Die Breite jedes Streifens ist h und die Höhe gleich dem Funktionswert des Integranden in der Mitte des Teilintervalls:

$$\bar{d}_{\text{EM}} = \frac{r_E}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{a - b \cos x} dx \approx \frac{r_E}{2\pi} \sum_{i=1}^n h \cdot \sqrt{a - b \cos \left[\left(i - \frac{1}{2} \right) h \right]} \quad (16)$$

$$= r_E \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{a - b \cos \left[\left(i - \frac{1}{2} \right) \frac{2\pi}{n} \right]}. \quad (17)$$

Die Summe (17) kann mit einer Schleife in einem Programm für variable n auf einem Rechner ausgewertet werden. Je größer n , desto feiner wird die Unterteilung und desto genauer das Ergebnis:

n	$\bar{d}_{\text{EM}}$ in AE
10	1,69383 23840 87
100	1,69349 51475 72
1000	1,69349 51475 72

Es ist zu erkennen, dass bereits 100 Teilintervalle ein Resultat liefern, welches auf 12 Dezimalstellen exakt ist. Die gesuchte mittlere Entfernung zwischen Erde und Mars beträgt also

$$\bar{d}_{\text{EM}} = \mathbf{1,69350 \text{ AE}}. \quad (18)$$

Punktverteilung:

- 1,0 Punkte für die richtige Lösung (18)