

Lösung:

a) Der gesamte Wärmestrom, der je Zeiteinheit im Innern der Kugel erzeugt wird, beträgt

$$\dot{Q} = m\dot{q} = \frac{4\pi R^3}{3} \varrho \dot{q}. \quad (1)$$

Da sich der Asteroid im stationären Zustand befindet, muss er die Wärme in Form von Temperaturstrahlung abgeben[†]. Der Gesamtstrahlungsfluss durch seine Oberfläche ist nach dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz

$$\dot{Q} = 4\pi R^2 \sigma T_s^4 \quad (2)$$

mit der STEFAN-BOLTZMANN-Konstante $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K}^4)$. Gleichsetzen von (1) und (2) führt auf

$$T_s = \sqrt[4]{\frac{R\varrho\dot{q}}{3\sigma}} = 38,1 \text{ K}. \quad (3)$$

b) Wir betrachten jetzt nur den Wärmestrom $\dot{Q}(r)$, der innerhalb einer gedachten Kugel vom Radius r im Innern erzeugt wird. Da die Wärmeerzeugung homogen ist, gilt nach (1)

$$\dot{Q}(r) = \frac{4\pi r^3}{3} \varrho \dot{q}. \quad (4)$$

Dieser Wärmestrom muss mit der Wärmestromdichte j_W durch die Oberfläche der gedachten Kugel $A = 4\pi r^2$ treten, also mit (4)

$$\dot{Q} = \oint j_W \cdot d\mathbf{A} = \oint j_W dA = j_W \oint dA = j_W \cdot 4\pi r^2 \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi r^3}{3} \varrho \dot{q} = j_W \cdot 4\pi r^2 \quad (6)$$

$$\Rightarrow j_W = \frac{\varrho \dot{q}}{3} r. \quad (7)$$

Die Wärmestromdichte j_W nimmt also linear mit wachsendem Radius r zu.

Nun benötigen wir noch das FOURIERSche Wärmeleitungsgesetz, welches den Zusammenhang zwischen Wärmestromdichte und Temperaturänderung herstellt:

$$j_W = -\lambda \frac{dT}{dr}. \quad (8)$$

Wir leiten daraus das Temperaturprofil $T(r)$ im Innern des Asteroiden ab:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{\varrho \dot{q}}{3\lambda} r \quad \Rightarrow \quad dT = -\frac{\varrho \dot{q}}{3\lambda} r dr \quad (9)$$

$$\Rightarrow \int_T^{T_s} dT = T_s - T = -\frac{\varrho \dot{q}}{3\lambda} \int_r^R r dr = -\frac{\varrho \dot{q}}{6\lambda} (R^2 - r^2) \quad (10)$$

$$\Rightarrow T(r) = T_s + \frac{\varrho \dot{q}}{6\lambda} (R^2 - r^2). \quad (11)$$

Schließlich ergibt sich aus (11) mit $T_c = T(r=0)$:

$$T_c = T_s + \frac{\varrho \dot{q}}{6\lambda} R^2 = 288,1 \text{ K} \approx 15^\circ \text{C} (!). \quad (12)$$

Punktverteilung:

- 0,4 Punkte für das Ergebnis (3)
- 0,6 Punkte für das Ergebnis (12)

[†]Wärmeleitung und Konvektion können im (leeren) interstellaren Raum ausgeschlossen werden.