Lösung:

a) Für die anziehende Federkraft $\boldsymbol{F}$, die offenbar eine Zentralkraft[†] ist (d. h. ihr Betrag hängt nicht von der Richtung ab), gilt

$$\boldsymbol{F} = -k\,\boldsymbol{r}. \tag{1}$$

Das Grundgesetz der Dynamik (2. NEWTONsches Axiom) $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$ führt somit auf die DGL'en

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -k\,\boldsymbol{r}. \tag{2}$$

Bewegungen in Zentralfeldern verlaufen stets in einer Ebene, hier der x, y-Ebene, weshalb (2) mit $\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j}$, $\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{x}\,\boldsymbol{i} + \ddot{y}\,\boldsymbol{j}$ und

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3}$$

in Komponenten geschrieben

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad \ddot{y} = -\omega^2 y \tag{4}$$

lautet. Die Bewegung jeder der Koordinaten x, y stellt eine einfache Schwingung mit der gemeinsamen Frequenz ω dar (sog. *räumlicher Oszillator*):

$$x = a\cos(\omega t + \alpha), \qquad y = b\cos(\omega t + \beta). \tag{5}$$

Die Amplituden a, b und Phasenwinkel α, β bestimmen sich aus den speziellen Anfangsbedingungen. Wenn wir hieraus die Zeit t eliminieren können, erhalten wir die Bahnkurve.

Dies gelingt z. B. mithilfe der Additionstheoreme

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\cos(\varphi + \delta) = b\cos\delta\cos\varphi - b\sin\delta\sin\varphi, \tag{6}$$

wobei in (6)

$$\varphi = \omega t + \alpha, \tag{7}$$
$$\delta = \beta - \alpha \tag{8}$$

gesetzt wurde. Aus (6) folgt nun

$$\cos\varphi = \frac{x}{a}, \qquad \sin\varphi = \frac{x\cos\delta}{a\sin\delta} - \frac{y}{b\sin\delta} \tag{9}$$
$$\Longrightarrow \quad 1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = \frac{x^2}{a^2}\frac{1}{\sin^2\delta} + \frac{y^2}{b^2}\frac{1}{\sin^2\delta} - \frac{2xy}{ab}\frac{\cos\delta}{\sin^2\delta} \tag{10}$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\delta = \sin^2\delta. \tag{11}$$

Die Bahnkurve, beschrieben durch (11), ist die einer *Ellipse* in allgemeiner Lage. Unsere Anfangsbedingungen für $t = 0$ lauten mit (5):

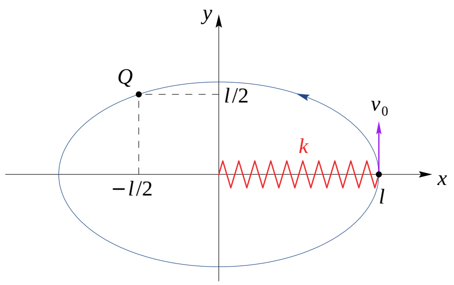
$$x(t=0) = a\cos\alpha = l \tag{12}$$
$$y(t=0) = b\cos\beta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{2} \tag{13}$$
$$\dot{x}(t=0) = -\omega a\sin\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 0 \tag{14}$$
$$\dot{y}(t=0) = -\omega b\sin\beta = -\omega b = v_0. \tag{15}$$

[†] Es ist aus der theoretischen Mechanik bekannt, dass es nur zwei Typen von Zentralfeldern gibt, in denen alle Bahnen finiter Bewegungen geschlossen sind, nämlich bei denen die Kraft proportional zu $\frac{1}{r^2}$ oder zu r ist [1].

Damit wird (8) $\delta = \beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$, d. h., die beiden Schwingungen stehen folglich senkrecht aufeinander‡ und (11) vereinfacht sich auf die Normalform einer Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0}. \tag{16}$$

Das folgende Bild zeigt die elliptische Bahnkurve:



b) Die Halbachsen a, b der Ellipse können nun aus (12)–(15) und (3) bestimmt werden:

$$a = l, \qquad b = \left|\frac{v_0}{\omega}\right| = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{17}$$

Daraus folgt mithilfe von (16), wenn die Koordinaten des Punktes Q, also $x = -\frac{l}{2}$, $y = \frac{l}{2}$, dort eingesetzt werden:

$$\frac{l^2}{4}\left(\frac{1}{l^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{l}{\sqrt{3}}. \tag{18}$$

Mit (18) und (17) ergibt sich schließlich die gesuchte Anfangsgeschwindigkeit zu

$$v_0 = \boldsymbol{l\sqrt{\frac{k}{3m}}}. \tag{19}$$

Literatur

[1] L. D. Landau, E. M. Lifschitz: *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Bd. I Mechanik, Akademie-Verlag Berlin, 1976.

Punktverteilung:

- 0,2 Punkte für (4)
- 0,1 Punkte für (5)
- 0,2 Punkte für (11)
- 0,3 Punkte für (16) und (17)
- 0,2 Punkte für das Ergebnis (19)

‡Damit ist klar, dass die Bahnkurven Lissajous-Figuren sind; hier die spezielle einer Ellipse.