Lösung:

Wir benutzen das Konzept der *Dimensionen* [1]. Sie lehnen sich an die sieben *Basisgrößen* an, die zusammen mit den gleichnamigen Basisdimensionen in folgender Tabelle aufgeführt sind:

Basisgröße/Basisdimension	Dimension
Länge	L
Zeit	T
Masse	M
Stoffmenge	N
elek. Stromstärke	I
Temperatur	Θ
Lichtstärke	J

Mithilfe dieser Basisdimensionen ist es möglich, die Dimensionen *aller* physikalischen Größen anzugeben.

Wir bestimmen zunächst die Dimensionen aller beteiligten Größen P, q, a, c und ε_0 in unserer Aufgabe. Für die Leistung P greifen wir auf bekannte Gleichungen aus der Mechanik zurück (Arbeit W, Zeit t, Kraft F, Weg s, Masse m):

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Fs}{t} = \frac{mas}{t} \tag{2}$$

$$\Longrightarrow \qquad \dim P = \dim\left(\frac{mas}{t}\right) = \frac{\mathsf{M} \cdot \mathsf{LT}^{-2} \cdot \mathsf{L}}{\mathsf{T}} = \mathsf{ML}^2\mathsf{T}^{-3}. \tag{3}$$

Ebenso geschieht dies für die Ladung q (elektrische Stromstärke I, Zeit t):

$$q = It \tag{4}$$

$$\Longrightarrow \qquad \dim q = \dim(It) = \mathsf{IT} \tag{5}$$

und die elektrische Feldkonstante ε_0 (Kraft F, Ladung q, Abstand r):

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon_0 \sim \frac{q^2}{Fr^2} \tag{6}$$

$$\Longrightarrow \qquad \dim \varepsilon_0 \sim \dim\left(\frac{q^2}{Fr^2}\right) = \frac{\mathsf{I}^2\mathsf{T}^2}{\mathsf{MLT}^{-2} \cdot \mathsf{L}^2} = \mathsf{M}^{-1}\mathsf{L}^{-3}\mathsf{T}^4\mathsf{I}^2. \tag{7}$$

Schließlich können wir die Dimensionen der Beschleunigung a und der Lichtgeschwindigkeit c unmittelbar angeben:

$$\dim a = \mathsf{LT}^{-2} \tag{8}$$

$$\dim c = \mathsf{LT}^{-1}. \tag{9}$$

Die ermittelten Dimensionen werden in folgender Tabelle nochmals zusammengefasst:

P	$\mathsf{ML}^2\mathsf{T}^{-3}$
q	IT
a	LT^{-2}
c	LT^{-1}
ε_0	$\mathsf{M}^{-1}\mathsf{L}^{-3}\mathsf{T}^4\mathsf{I}^2$

Nun kommt (1) aus der Aufgabenstellung ins Spiel. Es müssen also folgende Gleichungen gelten:

$$P \sim q^{\alpha}\, a^{\beta}\, c^{\gamma}\, \varepsilon_0^{\delta} \tag{10}$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathsf{ML^2T^{-3}} = (\mathsf{IT})^{\alpha} + \left(\mathsf{LT^{-2}}\right)^{\beta} + \left(\mathsf{LT^{-1}}\right)^{\gamma} + \left(\mathsf{M^{-1}L^{-3}T^4I^2}\right)^{\delta} \tag{11}$$

$$= \mathsf{M}^{-\delta}\mathsf{L}^{\beta+\gamma-3\delta}\mathsf{T}^{\alpha-2\beta-\gamma+4\delta}\mathsf{I}^{\alpha+2\delta}. \tag{12}$$

Aus der letzten Gleichung folgt durch Exponentenvergleich ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Exponenten:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

dessen Lösung

$$\boldsymbol{\alpha = 2, \quad \beta = 2, \quad \gamma = -3, \quad \delta = -1} \tag{14}$$

lautet. Der gesuchte Ausdruck für die Strahlungsleistung ist somit

$$P \sim \frac{q^2 a^2}{\varepsilon_0 c^3}. \tag{15}$$

Wie ein Vergleich mit der LARMOR-Formel zeigt, fehlt in (15) nur ein Faktor $\frac{2}{3}$.

Alternative Lösung:

Man muss die gesuchten Exponenten α, β, γ, δ nicht in einem Zuge mithilfe des obigen Gleichungssystems ermitteln. Sie können auch bestimmt werden, indem etwa durch „scharfes Hinsehen“ aus den Dimensionen oder Maßeinheiten bestimmter Kombinationen von Ausdrücken die Exponenten einzeln nacheinander abgeleitet werden. Das gelingt dann, wenn die Zeilen der Koeffizientenmatrix in (13) nur wenige oder nur ein Nichtnullelement aufweisen. Aus (12) ist z. B. sofort ersichtlich (1. Zeile), dass $\delta = -1$ sein muss. Danach folgt aus der 4. Zeile unmittelbar $\alpha = 2$, usw.

Bemerkung:

Es empfiehlt sich, wann immer möglich eine *Probe* durchzuführen. Dies gilt insbesondere für Rechnungen mit Doppelbrüchen, die oft fehleranfällig sind.

Literatur

[1] CH. HETTICH, B. JÖDICKE, J. SUM: *„Physik Methoden“*, Springer Spektrum, 2023, Abschnitt 2.4.b, S. 55ff.

Punktverteilung:

- 0,6 Punkte, wenn die Idee des Exponentenvergleichs (12) richtig erkannt wurde
- jeweils 0,1 Punkte für jede richtige Konstante in (14)