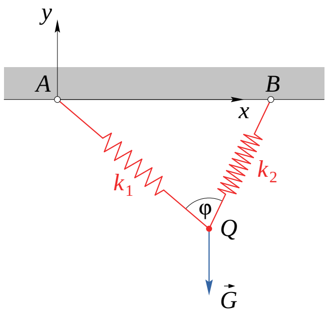
Lösung:

Wir legen Punkt A in den Ursprung eines kartesischen (x, y)-Koordinatensystems. Die gesuchte Position der Punktmasse m sei $Q(x, y)$, wie im folgenden Bild zu sehen ist:



In dieser Aufgabe treten nur drei Kräfte auf, die zwei rücktreibenden Federkräfte und die Gewichtskraft G. Alle drei Kräfte sind konservativ, sodass das Gesamtpotenzial der Anordnung angeschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} V(x,y) &= \frac{k_1}{2}\left(\overline{AQ} - l_1\right)^2 + \frac{k_2}{2}\left(\overline{BQ} - l_2\right)^2 + Gy \\ &= \frac{k_1}{2}\left(\sqrt{x^2+y^2} - l_1\right)^2 + \frac{k_2}{2}\left(\sqrt{(d-x)^2+y^2} - l_2\right)^2 + Gy. \qquad (1) \end{aligned}$$

Da die Wurzeln in (1) im Folgenden häufig auftreten, verwenden wir folgende Abkürzungen:

$$d_1 = d_1(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}, \qquad d_2 = d_2(x,y) := \sqrt{(d-x)^2+y^2}, \qquad (2)$$

womit sich (1) kürzer als

$$V(x,y) = \frac{k_1}{2}(d_1 - l_1)^2 + \frac{k_2}{2}(d_2 - l_2)^2 + Gy \qquad (3)$$

schreibt.

In Ruheposition von Q muss $V(x, y)$ ein Minimum annehmen. Die notwendige Bedingung dafür lautet

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\boldsymbol{e}_y\right) = F_x\,\boldsymbol{e}_x + F_y\,\boldsymbol{e}_y = 0, \qquad (4)$$

in Übereinstimmung damit, dass die resultierende Kraft $\boldsymbol{F}$ auf m im Ruhezustand verschwinden muss, also mit (3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= k_1(d_1 - l_1)\frac{\partial d_1}{\partial x} + k_2(d_2 - l_2)\frac{\partial d_2}{\partial x} = \frac{k_1(d_1 - l_1)x}{d_1} - \frac{k_2(d_2 - l_2)(d-x)}{d_2} \\ &= k_1\left(1 - \frac{l_1}{d_1}\right)x - k_2\left(1 - \frac{l_2}{d_2}\right)(d-x) = 0 \qquad (5) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= k_1(d_1 - l_1)\frac{\partial d_1}{\partial y} + k_2(d_2 - l_2)\frac{\partial d_2}{\partial y} + G = \frac{k_1(d_1 - l_1)y}{d_1} + \frac{k_2(d_2 - l_2)y}{d_2} + G \\ &= k_1\left(1 - \frac{l_1}{d_1}\right)y + k_2\left(1 - \frac{l_2}{d_2}\right)y + G = 0. \qquad (6) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (5) und (6) stellen nun ein nichtlineares Gleichungssystem für x, y dar, welches nur numerisch gelöst werden kann. In Analogie zum eindimensionalen Newton-Raphson-Verfahren kann dieses auch auf mehrere Dimensionen erweitert werden.

Dazu betrachten wir die TAYLOR-Reihenentwicklung

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{J}\cdot\Delta\boldsymbol{x} + \mathcal{O}(\Delta\boldsymbol{x}^2) \tag{7}$$

mit

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

setzen $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ und brechen die Entwicklung (7) nach dem linearen Glied ab [1]. Dies liefert ein lineares Gleichungssystem für die näherungsweisen Korrekturen $\Delta\boldsymbol{x}$:

$$\boldsymbol{J}\cdot\Delta\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{F}, \tag{9}$$

sodass eine Iteration

$$\boldsymbol{x}_{\text{new}} = \boldsymbol{x}_{\text{old}} + \Delta\boldsymbol{x} \tag{10}$$

schrittweise an die Lösung von (5), (6) heranführt.

Es muss somit die JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}$ berechnet werden:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} k_1\left(1-\frac{l_1 y^2}{d_1^3}\right) + k_2\left(1-\frac{l_2 y^2}{d_2^3}\right) & k_1\frac{l_1 xy}{d_1^3} - k_2\frac{l_2(d-x)y}{d_2^3} \\ k_1\frac{l_1 xy}{d_1^3} - k_2\frac{l_2(d-x)y}{d_2^3} & k_1\left(1-\frac{l_1 x^2}{d_1^3}\right) + k_2\left(1-\frac{l_2 (d-x)^2}{d_2^3}\right) \end{bmatrix} \tag{11}$$

Starten wir die Iteration mit Werten für x und y, die nicht zu weit von den Lösungen entfernt liegen†, erhalten wir mit den gegebenen Zahlenwerten aus der Aufgabenstellung die Lösung

$$x = 0{,}3553283\ \text{m}, \quad y = -0{,}3023032\ \text{m} \tag{12}$$

$$\Longrightarrow \quad d_1 = 0{,}4665248\ \text{m}, \quad d_2 = 0{,}3351375\ \text{m} \tag{13}$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\varphi = \frac{d_1^2 + d_2^2 - d^2}{2 d_1 d_2} = 0{,}25571652, \tag{14}$$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{\varphi = 75{,}184\,^\circ}. \tag{15}$$

Alternative Lösung:

Man kann die Aufgabe auch viel einfacher über eine Monte-Carlo-Simulation lösen. Dazu werden im rechteckigen Gebiet $R = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le d; -y_{\min} \le y \le 0\}$ zufällig Punkte $Q(x,y)$ gelegt und das Potenzial $V(x,y)$ nach (1) berechnet. Zu Beginn sei $V_{\min} = 10^{30} J$. Ist nun $V(x,y) < V_{\min}$, wird sich dieser Punkt gemerkt und $V_{\min} = V(x,y)$ gesetzt. So ergibt sich nach ca. 10^8 Versuchen das obige Ergebnis. Die untere Grenze $y_{\min}$ muss evtl. abgesenkt werden, falls das Verfahren gegen einen Punkt auf der unteren Seite des Rechtecks konvergiert.

Literatur

[1] W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, B. P. FLANNERY: „*Numerical Recipes in C*“, 2. Aufl., Abschnitt 9.6, S. 379ff.

Punktverteilung:

- 1,0 Punkte für die richtige Lösung (15)

†Dies ist beim NEWTON-RAPHSON-Verfahren immer der Fall. Notfalls muss etwas mit den Startwerten probiert werden; wenn das Verfahren dann konvergiert, strebt es sehr schnell der Lösung zu.