Physik-Marathon 2024

– Aufgabe 4 –

(27. Mai – 2. Juni)

Eine Studentin möchte die Brennweite einer dünnen Sammellinse aus einer optischen Abbildung ermitteln. Dazu bildet sie eine punktförmige Lichtquelle, die sich in der Gegenstandsweite von $g = 23{,}4\,\text{cm}$ zur Linse befindet, so ab, dass das reelle Bild in einer Bildweite von $b = 59{,}6\,\text{cm}$ zur Linse zu sehen ist.

a) Berechne die Brennweite f der Linse!

b) Handelt es sich hierbei um eine vergrößerte oder verkleinerte Abbildung?

c) Die Gegenstandsweite g liegt mit Sicherheit im Intervall $[23{,}35\,\text{cm}; 23{,}45\,\text{cm}]$ und die Bildweite b ebenfalls mit Sicherheit im Intervall $[59{,}5\,\text{cm}; 59{,}7\,\text{cm}]$. In welchen Intervallen liegen dann die Brennweite f und der Abbildungsmaßstab β?

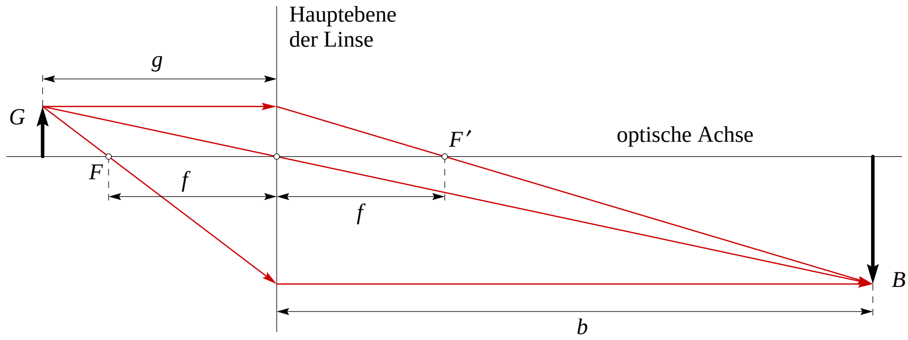
☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung von Aufgabe 4:

Die Gegenstandsweite g, die Bildweite b und die Brennweite f bei einer Abbildung durch Sammellinsen sind durch die sog. *Abbildungsgleichung* für die sphärische Linse

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad f = \frac{gb}{g+b} \tag{1}$$

miteinander verknüpft†. Das folgende Bild zeigt eine maßstabsgetreue Skizze:



a) Mit (1) errechnet sich die Brennweite zu

$$f = \frac{23{,}4\text{ cm} \cdot 59{,}6\text{ cm}}{23{,}4\text{ cm} + 59{,}6\text{ cm}} = 16{,}802892\text{ cm} \approx \mathbf{16{,}8\ cm}. \tag{2}$$

b) Außerdem ist bekannt, dass der *Abbildungsmaßstab* β durch die Quotienten

$$\beta = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}, \tag{3}$$

wobei G die Gegenstandsgröße und B die Bildgröße bezeichnen, gegeben ist. Gilt $\beta > 1$, liegt eine vergrößerte Abbildung vor, für $\beta < 1$ eine verkleinerte. In unserem Fall ist

$$\beta = \frac{b}{g} = 2{,}547, \tag{4}$$

es handelt sich also um eine **vergrößerte** Abbildung.

Alternativ kann auch das bekannte Kriterium „Liegt die Gegenstandsweite zwischen der einfachen und doppelten Brennweite, so handelt es sich um eine vergrößerte Abbildung.“ verwendet werden. Hier ist leicht zu überprüfen, dass $f < g < 2f$ gilt.

c) Wir haben für die Gegenstandsweite g und die Brennweite b folgende Intervalle vorgegeben:

$$g = \overline{g} \pm \Delta g = 23{,}4\text{ cm} \pm 0{,}05\text{ cm} \tag{5}$$

und

$$b = \overline{b} \pm \Delta b = 59{,}6\text{ cm} \pm 0{,}1\text{ cm}. \tag{6}$$

Gleichung (1) in ihrer Kehrwertform links zeigt, dass der Kehrwert der Brennweite $\frac{1}{f}$ maximal wird, also f minimal wird, wenn beide Weiten g *und* b ihre Minima annehmen. Somit errechnet sich mit (5) und (6) das Minimum von f zu:

$$f_{\text{min}} = \frac{g_{\text{min}} \cdot b_{\text{min}}}{g_{\text{min}} + b_{\text{min}}} = \frac{(\overline{g} - \Delta g)(\overline{b} - \Delta b)}{(\overline{g} - \Delta g) + (\overline{b} - \Delta b)} = \frac{23{,}35\text{ cm} \cdot 59{,}5\text{ cm}}{23{,}35\text{ cm} + 59{,}5\text{ cm}} = 16{,}76916\text{ cm}. \tag{7}$$

† In der *technischen Optik* wird (nach DIN 1335) eine abweichende Vorzeichenregelung benutzt. Danach werden alle Strecken zwischen Linse und Punkten auf der lichtausfallenden Seite positiv, alle Strecken zwischen Linse und Punkten auf der lichteinfallenden Seite negativ gezählt. Dann sind alle Gegenstandsweiten g negativ, und bild- und objektseitige Brennweite haben verschiedenes Vorzeichen. Gleichung (1) lautet hier: $\frac{1}{f'} = \frac{1}{b} - \frac{1}{g}$.

Andersherum gilt: Wenn g und b ihre Maxima annehmen, dann wird auch f maximal:

$$f_{\max} = \frac{g_{\max} \cdot b_{\max}}{g_{\max} + b_{\max}} = \frac{(\overline{g} + \Delta g)(\overline{b} + \Delta b)}{(\overline{g} + \Delta g) + (\overline{b} + \Delta b)} = \frac{23{,}45 \text{ cm} \cdot 59{,}7 \text{ cm}}{23{,}45 \text{ cm} + 59{,}7 \text{ cm}} = 16{,}83662 \text{ cm}. \tag{8}$$

Somit liegt f mit Sicherheit im Intervall (auf drei Nachkommastellen gerundet):

$$f \in [\mathbf{16{,}769\ cm; 16{,}837\ cm}]. \tag{9}$$

Beim Abbildungsmaßstab β ist es genau umgekehrt, hier müssen jeweils ein Minimum und ein Maximum kombiniert werden:

$$\beta_{\min} = \frac{b_{\min}}{g_{\max}} = \frac{\overline{b} - \Delta b}{\overline{g} + \Delta g} = \frac{59{,}5 \text{ cm}}{23{,}45 \text{ cm}} = 2{,}53731 \tag{10}$$

bzw.

$$\beta_{\max} = \frac{b_{\max}}{g_{\min}} = \frac{\overline{b} + \Delta b}{\overline{g} - \Delta g} = \frac{59{,}7 \text{ cm}}{23{,}35 \text{ cm}} = 2{,}55675, \tag{11}$$

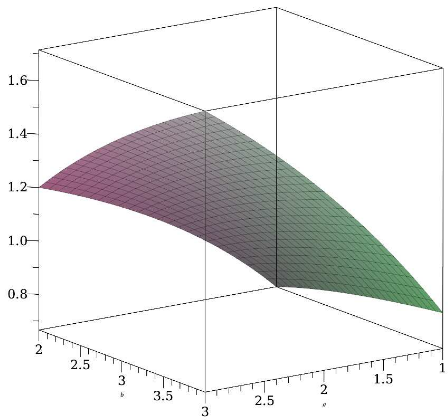
sodass der Abbildungsmaßstab mit Sicherheit im Intervall (auf drei Nachkommastellen gerundet)

$$\beta \in [\mathbf{2{,}537; 2{,}557}] \tag{12}$$

liegt.

Bemerkungen:

1.



Dies ist ein 3D-Plot der Funktion $f(g,b) = \frac{gb}{g+b}$ von Maple® (hier in den willkürlichen Grenzen $1 \leq g \leq 3$ und $2 \leq b \leq 4$), der zeigt, dass das Minimum $f_{\min} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$ tatsächlich für $g = g_{\min} = 1$ und $b = b_{\min} = 2$ angenommen wird (und entsprechend das Maximum $f_{\max} = \frac{12}{7} \approx 1{,}71$ für $g = g_{\max} = 3$ und $b = b_{\max} = 4$).

Außerdem zeigt dieses Beispiel, dass es **nicht** richtig ist, wenn hier *lineare Fehlerfortpflanzung* benutzt wird, um die Extrema von f zu bestimmen. Zahlenmäßig würde sich hier mit

$$g = 2, \quad b = 3, \quad \Delta g = 1, \quad \Delta b = 1 \tag{13}$$

Folgendes ergeben:

$$f = \frac{gb}{g+b} = \frac{6}{5} = 1{,}2; \qquad \Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial g}\right| \Delta g + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right| \Delta b = \frac{g^2\, \Delta b + b^2\, \Delta g}{(g+b)^2} = \frac{13}{25} = 0{,}52, \tag{14}$$

sodass $f_{\text{min}} = f - \Delta f = 0{,}68$ bzw. $f_{\text{max}} = f + \Delta f = 1{,}72$ folgt. Dies sind nicht die obigen exakt bestimmten Werte, obwohl die Abweichungen klein sind. Mathematisch gesehen müssen diese Abweichungen zwangsläufig auftreten, denn lineare Fehlerfortpflanzung beruht auf einer Linearisierung (Abbruch der TAYLOR-Reihen nach dem linearen Glied), was hier dazu führt, dass die in beiden Variablen g und b konkave Funktion (eine gekrümmte Fläche) durch eine (Tangential-)Ebene angenähert wird.

Ähnlich verhält es sich mit dem quadratischen (GAUSSschen) Fehlerfortpflanzungsgesetz.

In unserer vorliegenden Aufgabe sind die Abweichungen viel geringer: Wir erhalten als exaktes Ergebnis nach (7) $f_{\text{min}} = 16{,}76916\,11346$ cm, während $f - \Delta f = 16{,}76916\,1\mathbf{8523}$ cm ergibt (abweichende Stellen sind fett markiert).[‡] Wegen der Kleinheit der Abweichungen ziehen wir hier keine Teilpunkte ab.

2. Einige Teilnehmerinnen bzw. Teilnehmer haben den Fehler gemacht und z. B. die minimale Brennweite wie folgt berechnet:

$$f_{\text{min}} = \frac{b_{\text{min}} \cdot g_{\text{min}}}{b_{\text{max}} + g_{\text{max}}} = \frac{59{,}5\ \text{cm} \cdot 23{,}35\ \text{cm}}{59{,}7\ \text{cm} + 23{,}45\ \text{cm}} = 16{,}709\ \text{cm} < 16{,}769\ \text{cm}. \tag{15}$$

Dies geht natürlich nicht, weil dieselbe Gegenstandweite g und dieselbe Bildweite b im Zähler und Nenner von (13) auftreten muss, um eine „gültige“ Brennweite f zu errechnen.

Punktverteilung:

- 0,1 Punkte für das Hinschreiben der Abbildungsgleichung (1)
- 0,2 Punkte für das Ergebnis (2) unter a)
- 0,3 Punkte für die *vergrößerte* Abbildung unter b)
- 0,2 Punkte für das Intervall (9) unter c)
- 0,2 Punkte für das Intervall (12) unter c)
- kein Punktabzug, wenn wie in (14) lineare Fehlerfortpflanzung benutzt wird

[‡] Wir können diese winzigen Abweichungen ohne Punktabzug durchgehen lassen, schließlich vermessen wir keine *Gravitationswellen*.