Physik-Marathon 2024

– Aufgabe 2 –

(13. Mai – 19. Mai)

Zwei Stahlkugeln mit vernachlässigbarem Durchmesser werden aus einer Höhe h über dem Erdboden nacheinander fallengelassen, und zwar die zweite Kugel in genau dem Augenblick, in dem die Erste die Strecke d durchfallen hat. Reibungskräfte bleiben hier unberücksichtigt.

Berechne den vertikalen Abstand beider Kugeln zum Zeitpunkt des Aufschlags der ersten Kugel!

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung von Aufgabe 2:

Wir rechnen nachfolgend mit den zurückgelegten Wegen beider Kugeln, also mit den abwärts gerichteten Strecken ausgehend von der Höhe h über dem Erdboden. Für die erste Kugel können wir als Weg-Zeit-Gesetz

$$s_1(t) = \frac{g}{2}t^2 \tag{1}$$

anschreiben, wobei $t = 0$ der Moment des Beginns ihres freien Falls ist. Dann benötigt die erste Kugel die Zeit

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{g}}, \tag{2}$$

um die Strecke d zu durchfallen. Zu diesem Zeitpunkt startet die zweite Kugel; ihr Weg-Zeit-Gesetz lautet somit:

$$s_2(t) = \begin{cases} 0, & t < t_1 \\ \frac{g}{2}(t - t_1)^2, & t \geq t_1. \end{cases} \tag{3}$$

Man beachte den zeitlichen „Versatz“ um die Zeitdifferenz t_1 zwischen (1) und (3). Die erste Kugel schlägt nun nach der Zeit

$$t_\mathrm{A} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{4}$$

auf dem Boden auf. Zu diesem Zeitpunkt hat die zweite Kugel mit (2) und (4) die Strecke

$$s_2(t_\mathrm{A}) = \frac{g}{2}(t_\mathrm{A} - t_1)^2 = \frac{g}{2}\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{2d}{g}}\right)^2 = \left(\sqrt{h} - \sqrt{d}\right)^2 = h + d - 2\sqrt{hd} \tag{5}$$

zurückgelegt. Somit beträgt der gesuchte Abstand beider Kugeln beim Aufschlag der Ersten

$$\Delta s = h - s_2(t_\mathrm{A}) = h - (h + d - 2\sqrt{hd}) = \boldsymbol{2\sqrt{hd} - d}. \tag{6}$$

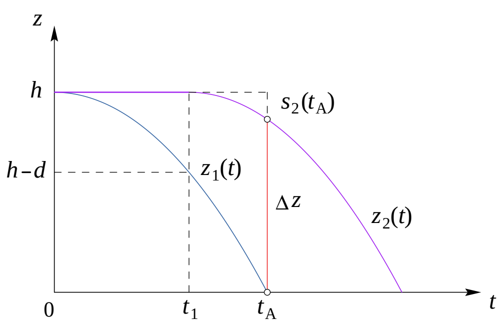
1. alternative Lösung:

Wir können ebenso ein z, t-Koordinatensystem einführen, in dem $t = 0$ wieder den Zeitpunkt des Loslassens der ersten Kugel angibt und z die Höhe über dem Erdboden ist. Entgegen der obigen Lösung ist die z-Achse also von unten nach oben gerichtet. Dann gelten für die Kugeln die Gleichungen:

$$z_1(t) = h - \frac{g}{2}t^2 \tag{7}$$

$$z_2(t) = \begin{cases} h, & t < t_1 \\ h - \frac{g}{2}(t - t_1)^2, & t \geq t_1. \end{cases} \tag{8}$$

Folgendes Diagramm veranschaulicht diese Funktionen (in rot ist der gesuchte vertikale Abstand Δz eingezeichnet):



Daraus lässt sich unmittelbar ablesen, dass mit (8)

$$\Delta z = z_2(t_\mathrm{A}) = h - \frac{g}{2}(t_\mathrm{A} - t_1)^2 \tag{9}$$

ist, welches wieder auf (6) führt.

2. alternative Lösung:

Wir verschieben den neuen Zeitnullpunkt $t' = 0$ in den Moment, in dem die zweite Kugel zu fallen beginnt. Dann folgen mit $t' = t - t_1$ aus (7) und (8) die modifizierten Gleichungen

$$z_1(t') = h - \frac{g}{2}(t' + t_1)^2 = -\frac{g}{2}t'^2 + v_0 t' + \left(h - \frac{g}{2}t_1^2\right) \tag{10}$$

$$z_2(t') = h - \frac{g}{2}t'^2 \tag{11}$$

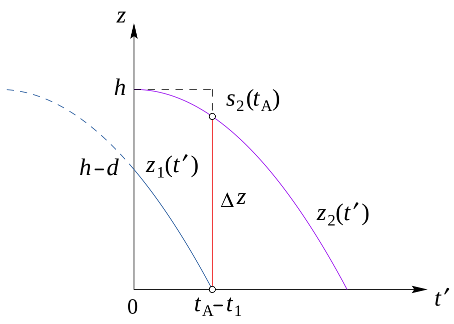
mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = -gt_1$ für Kugel 1 und für $t' \geq 0$. Für $t' = 0$ gilt in (10)

$$z_1(0) = h - \frac{g}{2}t_1^2 = h - d, \tag{12}$$

welches identisch mit (2) ist. Der gesuchte Abstand errechnet sich hier mit (11) zu

$$\Delta z = z_2(t_\mathrm{A} - t_1) = h - \frac{g}{2}(t_\mathrm{A} - t_1)^2 = h - s_2(t_\mathrm{A}), \tag{13}$$

also wieder (9) bzw. (6). Nachfolgend ist das z, t'-Diagramm gezeichnet:



Alternative Lösung von einem Teilnehmenden (leicht gekürzt):

Nachdem sie die Strecke d gefallen ist, hat die erste Kugel die Geschwindigkeit $\sqrt{2gd}$, während die zweite Kugel die Geschwindigkeit 0 hat. Dieser Geschwindigkeitsunterschied der beiden Kugeln bleibt danach bis zum Aufprall der ersten Kugel konstant, da beide gleich beschleunigt werden.

Die Zeit, die eine Kugel braucht, um s weit zu fallen, ist

$$\sqrt{\frac{2s}{g}}. \tag{14}$$

Damit ist die Zeit zwischen Loslassen der zweiten Kugel und Aufprall der ersten Kugel

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{2d}{g}}. \tag{15}$$

Damit vergrößert sich der Abstand der Kugeln in der Zeit um

$$\sqrt{2gd}\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{2d}{g}}\right) = 2\sqrt{hd} - 2d. \tag{16}$$

Da er zum Zeitpunkt des Loslassens der zweiten Kugel d war, ist der Abstand insgesamt $\mathbf{2\sqrt{hd} - d}$.

Bemerkungen:

1. Es kam vor, dass „zurückgelegter Weg“ (beginnend von $z = h$ abwärts gerichtet) mit „z-Koordinate“ (beginnend von $z = 0$ aufwärts gerichtet) verwechselt wurde. Das führt in der Folge dazu, dass im Gegensatz zu (6) das Ergebnis

$$\Delta s = 2\sqrt{h^2 - hd} - h + d = 2\sqrt{h(h-d)} - (h-d) \tag{17}$$

lautet. Es könnte hierin zweimal $h - d$ durch d ersetzt werden, um trotzdem zum richtigen Ausdruck zu gelangen.
Man kann sich das auch so überlegen, dass für $d \to 0$ als vertikaler Abstand $\Delta z \to 0$ herauskommen muss (bei Kugeln werden zugleich losgelassen und treffen somit zugleich auf), und für $d \to h$ die zweite Kugel gar nicht mehr fällt, also $\Delta z \to h$ gilt. Beide Grenzfälle werden von (6) richtig beschrieben.

2. Liste der „nicht ganz richtigen“ Antworten:

- ▷ $d + \sqrt{2dg}t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2$
- ▷ $2h - 3d - 2\sqrt{2d^2 - hd}$
- ▷ $-1b + 2\sqrt{b}\sqrt{h} - 0{,}000002 \cdot h\,\mathrm{m}$
- ▷ d
- ▷ $2\sqrt{h^2 - hd} - h + d$
- ▷ $d - h + 2h\sqrt{1 - \frac{d}{h}}$
- ▷ $d - 2\sqrt{hd}$
- ▷ $h - 2\sqrt{hd} + d$
- ▷ $gt_\mathrm{E}^2 + d$
- ▷ $gt_0\left(t + \frac{t_0}{2}\right)$
- ▷ $\sqrt{hd} - d$
- ▷ $h - 2\sqrt{dh - d^2}$
- ▷ $h - \frac{1}{2}\sqrt{2g(h-d)}$
- ▷ $h - \frac{1}{2}g\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} + \sqrt{\frac{2d}{g}}\right)^2$

Punktverteilung:

- 0,3 Punkte für t_1
- 0,5 Punkte für $s_2(t_\mathrm{A})$
- 0,2 Punkte für das Ergebnis Δs

- insgesamt 0,6 Punkte, wenn d mit $h - d$ verwechselt wurde
- insgesamt 0,8 Punkte, wenn anstelle von (6) $d - 2\sqrt{hd} = -\Delta s$ als Ergebnis angegeben wurde
- insgesamt 0,9 Punkte, wenn anstelle von (6) $(\sqrt{h} - \sqrt{d})^2$ als Ergebnis angegeben wurde