Physik-Marathon 2023

– Aufgabe 7/20 –

(03. Juli – 20. August)

Ein Teilchen bewegt sich in der x, y-Ebene unter dem Einfluss einer Kraft $\boldsymbol{F}$. Sein Impuls $\boldsymbol{p}$ in Abhängigkeit von der Zeit t sei gegeben durch

$$\boldsymbol{p}(t) = A\,(\boldsymbol{i}\cos(kt) - \boldsymbol{j}\sin(kt))\,,$$

wobei A und k Konstanten sind. ($\boldsymbol{i}$ und $\boldsymbol{j}$ sind die Einheitsvektoren in x- bzw. y-Richtung.)

Ermittle den Winkel, den der Kraftvektor $\boldsymbol{F}$ mit dem Impulsvektor $\boldsymbol{p}$ einschließt!

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung:
Der Kraftvektor $\boldsymbol{F}$ berechnet sich nach NEWTON durch zeitliche Ableitung des Impulses $\boldsymbol{p}(t)$:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = -kA\left(\boldsymbol{i}\sin(kt) + \boldsymbol{j}\cos(kt)\right). \tag{1}$$

Dabei hat der Impulsvektor unabhängig von der Zeit den Betrag $|\boldsymbol{p}(t)| = A \neq 0$ und für den Kraftvektor gilt $|\boldsymbol{F}(t)| = Ak \neq 0$.
Das Skalarprodukt $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{p} = |\boldsymbol{F}|\cdot|\boldsymbol{p}|\cos\theta$ liefert dann den gesuchten Winkel θ:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{p} &= -kA^2\left(\boldsymbol{i}\sin(kt) + \boldsymbol{j}\cos(kt)\right)\cdot\left(\boldsymbol{i}\cos(kt) - \boldsymbol{j}\sin(kt)\right) &(2)\\ &= -kA^2(\sin(kt)\cos(kt) - \cos(kt)\sin(kt)) = 0, &(3)\end{aligned}$$

d. h. der gesuchte Winkel zwischen $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{p}$ beträgt $\theta = \mathbf{90\,°}$.

Alternative Lösung:
Mit $|\boldsymbol{p}(t)| = A = \text{const}$ folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{p}(t)^2\right) = 2\boldsymbol{p}(t)\cdot\dot{\boldsymbol{p}}(t) = 2\boldsymbol{p}(t)\cdot\boldsymbol{F}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A^2) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{F} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{F}\perp\boldsymbol{p}.$$

Zusatz: Es gibt an dieser Aufgabe jedoch noch etwas mehr zu untersuchen. Aus der gegebenen Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \frac{1}{m}\boldsymbol{p}$ können sowohl Ort $\boldsymbol{r}(t)$ als auch Beschleunigung $\boldsymbol{a}(t)$ durch zeitliche Integration bzw. Differenziation ermittelt werden:

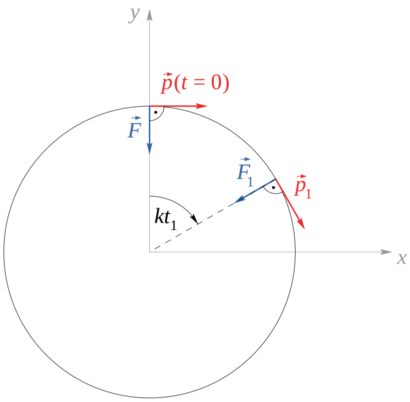
$$\boldsymbol{r}(t) = \int \boldsymbol{v}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{A}{m}\int_0^t (\boldsymbol{i}\cos(kt) - \boldsymbol{j}\sin(kt))\,\mathrm{d}t = \frac{A}{mk}(\boldsymbol{i}\sin(kt) + \boldsymbol{j}\cos(kt)), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{kA}{m}(\boldsymbol{i}\sin(kt) + \boldsymbol{j}\cos(kt)). \tag{5}$$

Bei der Integration in (4) muss noch der Ort $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(t=0)$ vorgegeben werden, er wurde hier mit $\boldsymbol{r}_0 = \frac{A}{mk}\boldsymbol{j}$ angenommen. Aus (4) ist nun ersichtlich, dass wegen

$$r(t) = \sqrt{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}} = \frac{A}{mk}\sqrt{(\boldsymbol{i}\sin(kt) + \boldsymbol{j}\cos(kt))^2} = \frac{A}{mk}\sqrt{\cos^2(kt) + \sin^2(kt)} = \frac{A}{mk} = \text{const} \tag{6}$$

die Bahnkurve ein Kreis mit dem Radius $\frac{A}{mk}$ ist. Die Bewegung läuft dabei gleichförmig (die Größe $k = \text{const}$ ist hier die Kreisfrequenz) im Uhrzeigersinn, beginnend zur Zeit $t = 0$ auf der y-Achse, wie im folgenden Bild zu sehen ist. Zusätzlich sind zwei Impuls- und Kraftvektoren zu unterschiedlichen Zeiten eingezeichnet.



Ein Vergleich von (4) mit (5) zeigt, dass stets

$$\boldsymbol{a} = -k^2 \boldsymbol{r} \tag{7}$$

gilt. Die Beschleunigung (und damit auch die Kraft) ist zu jedem Zeitpunkt zum Kreismittelpunkt gerichtet; die Kraft ist somit eine Zentralkraft oder Radialkraft.

Bemerkungen:

1. Wir waren großzügig, wenn bei der Berechnung des Skalarproduktes (3) nicht auf $|\boldsymbol{p}| \neq 0$ und $|\boldsymbol{F}| \neq 0$ hingewiesen wurde.

2. Einige Teilnehmer:innen haben (ohne das Skalarprodukt anzuwenden) explizit die Winkel ausgerechnet, die $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{F}$ mit der x-Achse einschließen und dabei festgestellt, dass ihre Differenz $90\,^\circ$ beträgt.

Punktverteilung:

- 0,6 Punkte für (1), d. h. die Berechnung von $\boldsymbol{F}$ aus $\boldsymbol{p}$
- 0,4 Punkte für die Berechnung des Skalarproduktes mit der Schlussfolgerung, dass der gesuchte Winkel $90\,^\circ$ beträgt oder eine andere gleichwertige Begründung