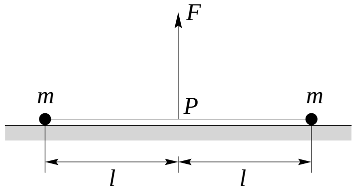
Physik-Marathon 2023

– Aufgabe 3/20 –

(05. Juni – 11. Juni)

Zwei Teilchen der Masse m sind an den Enden eines masselosen, nicht dehnbaren Fadens der Länge $2l$ befestigt. Das System befindet sich anfangs auf einer reibungsfreien horizontalen Oberfläche so, dass der Faden straff gespannt ist und sich beide Massen im Abstand l vom Mittelpunkt P der Anordnung befinden (siehe folgendes Bild).



Der Mittelpunkt P des Fadens wird nun mit einer kleinen konstanten Kraft F senkrecht nach oben gezogen. Daraufhin bewegen sich die Teilchen auf der Oberfläche aufeinander zu. Die Fäden bleiben dabei straff gespannt.

Berechne den Betrag ihrer jeweiligen horizontalen Beschleunigungen, wenn beide Teilchen den beliebigen Abstand $2d < 2l$ zueinander haben!

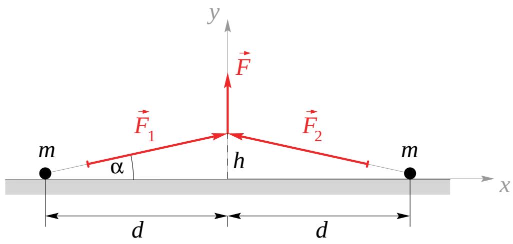
Tipp: Hier müssen *nicht* die Bewegungsgleichungen (als Differenzialgleichungen) aufgestellt und gelöst werden. Die Funktion $a(t)$ muss also nicht ausgerechnet werden. Es genügt, sich die wirkenden Kräfte genau anzusehen.

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung:
Mit Anheben des Mittelpunktes des Fadens teilt sich die angreifende Kraft $\boldsymbol{F}$[†] in zwei Teilkräfte $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ entlang der Fadenrichtungen so auf, dass

$$\boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} = \boldsymbol{F} \tag{1}$$

gilt, siehe folgendes Bild. Der Winkel, mit dem die an den Teilchen befestigten Fäden gegenüber der Horizontalen geneigt sind, sei mit α bezeichnet. Offensichtlich ist $d < l$, wie in der Aufgabenstellung bereits erwähnt.



Es entstehen zwei Paare rechtwinkliger Dreiecke, eines für die geometrischen Abmessungen (Anhebung h, halbe horizontale Entfernung d) und eines für die Kraftkomponenten von $\boldsymbol{F}_1 = (F_{1x}, F_{1y})$ und $\boldsymbol{F}_2 = (F_{2x}, F_{2y})$ in horizontaler und vertikaler Richtung. Alle diese Dreiecke sind einander ähnlich, weil sie rechtwinklig sind und α als Innenwinkel haben. Somit folgt mit dem Satz des Pythagoras:

$$\tan\alpha = \frac{h}{d} = \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{d} = \frac{|F_{1y}|}{|F_{1x}|}. \tag{2}$$

Offenbar gilt wegen der Kräftezerlegung (1) in vertikaler Richtung

$$|F_{1y}| = |F_{2y}| = \frac{F}{2}, \tag{3}$$

während aus Symmetriegründen (gleiche Massen m, gleicher Anfangsabstand l) in horizontaler Richtung

$$|F_{1x}| = |F_{2x}| = ma \qquad \text{(2. NEWTONsches Axiom)} \tag{4}$$

gilt. Dabei ist a der Betrag der gesuchten Beschleunigung in horizontaler Richtung, die auf jede der beiden Massen wirkt. Dann folgt aus (2), (3) und (4)

$$\frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{d} = \frac{F}{2ma} \qquad \Longrightarrow \qquad a = \boldsymbol{\frac{F}{2m} \cdot \frac{d}{\sqrt{l^2 - d^2}}} \tag{5}$$

$$= \boldsymbol{\frac{F}{2m} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{l^2}{d^2} - 1}}}. \tag{6}$$

Wird aus (2) zunächst $\tan\alpha$ mitgenommen, erhalten wir anstelle von (5) mit $\cos\alpha = \frac{d}{l}$

$$\tan\alpha = \frac{F}{2ma} \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{F}{2m} \cdot \frac{1}{\tan\alpha} = \boldsymbol{\frac{F}{2m} \cdot \frac{1}{\tan\left(\arccos\frac{d}{l}\right)}} \tag{7}$$

$$= \frac{F}{2m} \cdot \cot\alpha = \boldsymbol{\frac{F}{2m} \cdot \cot\left(\arccos\frac{d}{l}\right)}. \tag{8}$$

[†] Vektoren sind im Text immer in fetter Schrift zu erkennen, während sie in Bildern mit einem Pfeil darüber gekennzeichnet sind.

Weitergehende Lösung unter Einbeziehung der Zeit: Es genügt hierfür, die rechte Punktmasse m mit $x \geq 0$ zu betrachten. Wir gehen von (5) aus und setzen dort $d = x$ und $a = -a_x$. Außerdem sei $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ die momentane Geschwindigkeit in x-Richtung. Dann folgt mit der Abkürzung $\beta = \frac{F}{2m}$:

$$a_x = -\frac{F}{2m}\,\frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}} = -\beta\,\frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} = -\beta\,\frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}. \tag{9}$$

Gleichung (9) ist eine Differenzialgleichung (DGL) 1. Ordnung für die Funktion $v_x(x)$, die mit der Methode der Trennung der Veränderlichen gelöst werden kann (zur Trennung genügt es, beide Seiten mit dx zu multiplizieren). Anschließend wird integriert:

$$\int_0^{v_x} v_x\,\mathrm{d}v_x = \frac{1}{2}v_x^2 = -\beta\int_l^x \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Das Integral auf der rechten Seite von (8) kann mit der Substitution

$$u = \sqrt{l^2 - x^2}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u \tag{11}$$

gelöst werden. Wir erhalten somit aus (10):

$$\frac{1}{2}v_x^2 = -\beta\int(-\mathrm{d}u) = \beta u = \beta\,\sqrt{l^2 - x^2}\Big|_l^x = \beta\sqrt{l^2 - x^2}$$

$$v_x = -\sqrt{2\beta}(l^2 - x^2)^{\frac{1}{4}}. \tag{12}$$

Dies ist die Lösung der DGL (9) mit der Anfangsbedingung $v_x(x = l) = 0$. Wir müssen nach dem Wurzelziehen das negative Vorzeichen nehmen, da die Bewegung in $-x$-Richtung erfolgt.

Nun kommt die Zeit t ins Spiel mittels $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, welches wiederum auf eine DGL 1. Ordnung führt, diesmal für die Funktion $x(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(t = 0) = l$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{2\beta}(l^2 - x^2)^{\frac{1}{4}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{(l^2 - x^2)^{\frac{1}{4}}} = -\sqrt{2\beta}\,\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow \quad \int_l^x \frac{\mathrm{d}x}{(l^2 - x^2)^{\frac{1}{4}}} = -\sqrt{2\beta}\int_0^t \mathrm{d}t = -\sqrt{2\beta}\,t. \tag{13}$$

Das Integral auf der linken Seite von (13) ist leider nicht geschlossen analytisch auswertbar.‡ Um dennoch einen Funktionsgraphen präsentieren zu können, wird (13) noch mittels der Substitution $u = \frac{x}{l}$ auf eine dimensionslose Länge u $(0 \leq u \leq 1)$ normiert:

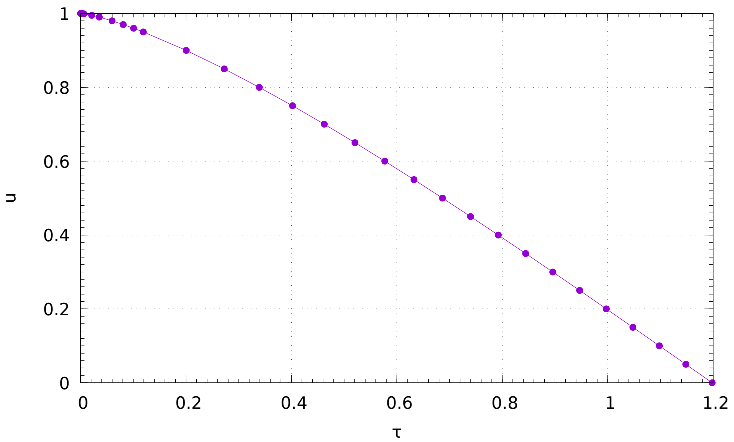
$$I = \int_u^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1 - u^2)^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{\frac{2\beta}{l}}\,t = \tau. \tag{14}$$

Die linke Seite von (14) kann mit Hilfsprogrammen wie z. B. Maple® numerisch ausgewertet werden. Damit ergibt sich folgende Wertetabelle:

‡Es gibt eine Darstellung von (14) als GAUSSsche hypergeometrische Funktion $u\,{}_2F_1(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; u^2)$.

u	$I(=\tau)$	u	$I(=\tau)$	u	$I(=\tau)$	u	$I(=\tau)$
1,00	0,00000	0,75	0,40200	0,50	0,68659	0,25	0,94681
0,95	0,11887	0,70	0,46227	0,45	0,73990	0,20	0,99746
0,90	0,20047	0,65	0,52049	0,40	0,79246	0,15	1,04786
0,85	0,27248	0,60	0,57710	0,35	0,84439	0,10	1,09806
0,80	0,33906	0,55	0,63239	0,30	0,89581	0,05	1,14813
						0,00	1,19814

Setzen wir zur weiteren Normierung in (14) noch $\sqrt{\frac{2\beta}{l}} = 1$, dann entspricht I der normierten Zeit τ, und wir erhalten folgendes $u(\tau)$-Diagramm:



Man liest daraus die Zeit t_E ab, die der gesamte Vorgang benötigt:

$$t_\mathrm{E} \approx 1{,}19814\sqrt{\frac{l}{2\beta}} = 1{,}19814\sqrt{\frac{ml}{F}}. \tag{15}$$

Mit (12) wurde oben ein Ausdruck für die Geschwindigkeit $v_x(x)$ in x-Richtung gefunden. Sein Pendant in y-Richtung, $v_y(y)$, lässt sich wie folgt berechnen. Wird die Kopplungsbedingung $x^2 + y^2 = l^2 = \text{const}$ einmal nach der Zeit differenziert, ergibt sich mit (12)

$$\begin{aligned} 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= v_y = -\frac{x}{y}v_x = \sqrt{2\beta}\,\frac{\sqrt{l^2-y^2}}{y}(l^2-x^2)^{\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{2\beta}\,\frac{\sqrt{l^2-y^2}}{y}y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\beta}\sqrt{\frac{l^2}{y} - y}. \end{aligned} \tag{16}$$

Analog zum obigen Vorgehen wird versucht, eine Gleichung $y(t)$, oder besser die Umkehrfunktion $t(y)$, herzuleiten. Man erhält aus (15), diesmal mit der Anfangsbedingung $y(t=0) = 0$:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2\beta}\sqrt{\frac{l^2-y^2}{y}} \\ \Longrightarrow \quad &\int_0^y \sqrt{\frac{y}{l^2-y^2}}\,\mathrm{d}y = \sqrt{2\beta}\int_0^t \mathrm{d}t = \sqrt{2\beta}\,t. \end{aligned} \tag{17}$$

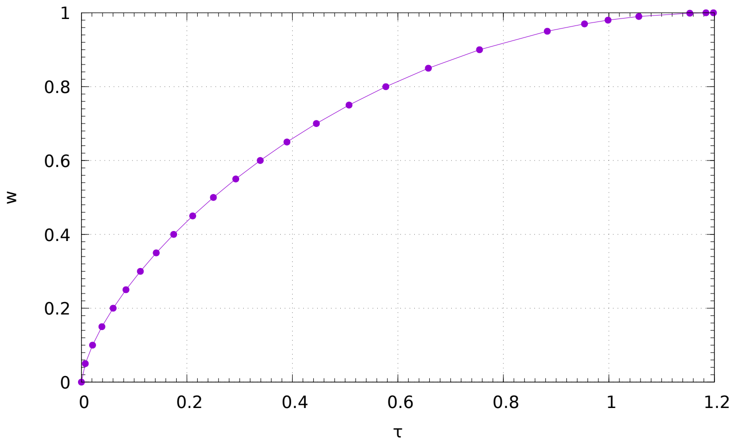
Auch hier ist auf der linken Seite von (16) das Integral nicht analytisch lösbar. Mit der Normierung $w = \frac{y}{l}$ ergibt sich:

$$J = \int_0^w \sqrt{\frac{w}{1-w^2}}\,\mathrm{d}w = \sqrt{\frac{2\beta}{l}}\,t = \tau. \tag{18}$$

Eine numerische Auswertung des Integrals in (17) liefert folgende Tabelle:

w	$J(=\tau)$	w	$J(=\tau)$	w	$J(=\tau)$	w	$J(=\tau)$
0,00	0,00000	0,25	0,08448	0,50	0,25011	0,75	0,50733
0,05	0,00746	0,30	0,11175	0,55	0,29270	0,80	0,57710
0,10	0,02113	0,35	0,14189	0,60	0,33906	0,85	1,65768
0,15	0,03892	0,40	0,17493	0,65	0,38972	0,90	1,75480
0,20	0,06015	0,45	0,21094	0,70	0,44545	0,95	1,88326
						1,00	1,19814

Analog zur Horizontalkomponente wurde durch Setzen von $\sqrt{\frac{2\beta}{l}} = 1$ wieder die normierte Zeit $\tau = J$ eingeführt. Wir erhalten folgendes $w(\tau)$-Diagramm:



Damit ist das Bewegungsproblem wenigstens näherungsweise gelöst.

Es lohnt sich, für die beiden Geschwindigkeiten $v_x(t)$ und $v_y(t)$ die Grenzfälle a) $x \to l$ bzw. $y \to 0$ zu Beginn und b) $x \to 0$ bzw. $y \to l$ am Ende der Bewegung zu betrachten:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to l} v_x = 0; \qquad \lim_{y\to 0} v_y \to \infty; \tag{19a,b}$$

$$\text{b)}\ \lim_{x\to 0} v_x = \sqrt{2\beta l} = \sqrt{\frac{Fl}{m}} = \mathrm{const}; \qquad \lim_{y\to l} v_y = 0. \tag{20a,b}$$

Dies wird qualitativ auch durch die beiden obigen Diagramme bestätigt: (18a) ist im $u(\tau)$-Diagramm nicht deutlich zu erkennen, ein entsprechendes Zoomen der Kurve für $\tau \to 0$ bestätigt, dass die Kurve asymptotisch horizontal gegen 1 geht. Dagegen läuft die Funktion $w(\tau)$, Gleichung (18b), im unteren Diagramm für $\tau \to 0$ asymptotisch vertikal (also mit dem Anstieg unendlich) gegen 0. Für $\tau \to 1$ ist das Verhalten dagegen gedämpfter: v_x wird konstant (19a) und v_y geht gegen null (19b). Oder mit anderen Worten: Das „Aufspreitzen“ des Dreiecks, gebildet aus den beiden Massepunkten und P, zu Beginn hat viel mehr Dynamik als sein „Zusammenklappen“ am Ende.

Schließlich können wir noch an einem Zahlenbeispiel die Kopplung zwischen u und w, nämlich $u^2 + w^2 = 1$, entsprechend $x^2 + y^2 = l^2$, überprüfen: Nehmen wir die normierte Zeit $\tau = 0{,}4$ an. Dann kann man z. B. durch *regula falsi* finden: $u = 0{,}75162$ und $w = 0{,}5960$. Die beiden Werte erfüllen im Rahmen der Genauigkeit die obige Bedingung.

Berechnung von $\dot{u} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}$ *und* $\dot{w} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\tau}$*:* Da die Funktionen $u(\tau)$ und $w(\tau)$ nur punktweise bekannt sind (die durchgehende Kurve in den beiden obigen Diagrammen ist nur eine Spline-Interpolation durch die Punkte), ist es schwierig, ihre Ableitungen, also die normierten Geschwindigkeiten $\dot{u}$ und $\dot{w}$ zu ermitteln. Man kann aber (12) und (16) mittels $x = lu$, $y = lw$ und $\sqrt{\frac{2\beta}{l}} = 1$ wie oben normieren und erhält

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = \dot{u} = -(1-u^2)^{\frac{1}{4}}; \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\tau} = \dot{w} = \sqrt{\frac{1-w^2}{w}}. \tag{21a,b}$$

Wir leiten (21a) einmal nach τ ab und erhalten:

$$\frac{\mathrm{d}\dot{u}}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{1}{4}(1-u^2)^{-\frac{3}{4}}(-2u)\dot{u} = \frac{1}{2}u\dot{u}(1-u^2)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}u\dot{u}\left(-\frac{1}{\dot{u}^3}\right) = -\frac{u}{2\dot{u}^2}$$

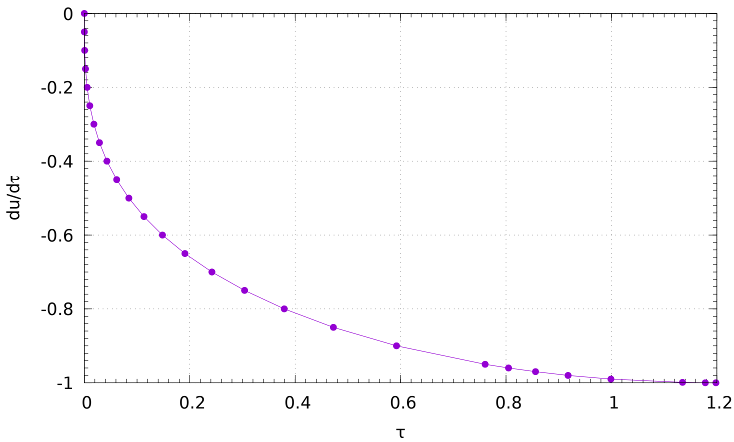
$$\Longrightarrow \quad 2\dot{u}^2\,\mathrm{d}\dot{u} = -u\,\mathrm{d}\tau = -\sqrt{1-\dot{u}^4}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\Longrightarrow \quad K = -2\int_0^{\dot{u}} \frac{\dot{u}^2}{\sqrt{1-\dot{u}^4}}\,\mathrm{d}\dot{u} = \tau. \tag{22}$$

Eine numerische Auswertung des Integrals in (22) liefert folgende Tabelle:

$\dot{u}$	$K(=\tau)$	$\dot{u}$	$K(=\tau)$	$\dot{u}$	$K(=\tau)$	$\dot{u}$	$K(=\tau)$
−0,00	0,00000	−0,25	0,01043	−0,50	0,08448	−0,75	0,30392
−0,05	0,00008	−0,30	0,01803	−0,55	0,11319	−0,80	0,37922
−0,10	0,00067	−0,35	0,02868	−0,60	0,14827	−0,85	0,47245
−0,15	0,00225	−0,40	0,04290	−0,65	0,19076	−0,90	0,59222
−0,20	0,00534	−0,45	0,06129	−0,70	0,24202	−0,95	0,76028
						−1,00	1,19814

Wir erhalten folgendes $\dot{u}(\tau)$-Diagramm:



Das $\dot{w}(\tau)$-Diagramm konnte aus zeitlichen Gründen nicht mehr berechnet werden, ebenso die Beschleunigungen $\ddot{u}(\tau)$ und $\ddot{w}(\tau)$.

Bemerkungen:

1. Selbstverständlich ist die obige weitergehende Lösung nicht Gegenstand dieser Aufgabe. Sie ist nur zur weiteren eventuellen Beschäftigung mit dieser Problemstellung gedacht.

2. Ich habe keine Literaturstelle für diese Aufgabe gefunden, und eine Internetrecherche war ebenfalls erfolglos. Nach den Rechnungen auf den letzten Seiten ist auch klar, warum sich diese Aufgabe nicht für Lehrbücher eignet. Weiterführende Gedanken hierzu sind ebenso willkommen wie evtl. Hinweise auf Literatur.

Punktverteilung:

- 0,2 Punkte für (1) bzw. Kräftezerlegung
- 0,5 Punkte für (2)
- 0,3 Punkte für (3), (4) und (5)
- 0,1 Punkte Abzug, wenn der Ausdruck richtig ist, aber nicht d enthält (z. B. α stattdessen)
- 0,1 Punkte Abzug, wenn der Faktor $\frac{1}{2}$ im Ergebnis fehlt
- insgesamt nur 0,5 Punkte, wenn anstelle des Kotangens (8) der Kosinus genommen wurde, also als Ergebnis $a = \frac{F}{2m} \frac{l}{d}$ angegeben wird
- insgesamt nur 0,1 Punkte, wenn nur der Satz des Pythagoras erkannt wurde und alles andere falsch ist