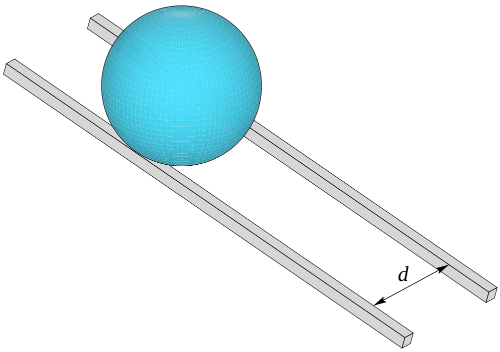
Physik-Marathon 2024

– Aufgabe 9 –

(24. Juni – 8. September)

Wir betrachten eine homogene, massive Kugel mit dem Radius r. Sie wird, wie in der Skizze zu sehen, auf zwei parallele, geneigte Stangen gelegt und zunächst festgehalten. Die Stangen sind gerade, unendlich steif und haben einen quadratischen Querschnitt. Dabei berührt die Kugel die Stangen von innen in jeweils einem Punkt. Der Abstand beider Berührungspunkte, die auf gleicher Höhe liegen, wird mit d bezeichnet.



Wird die Kugel nun losgelassen, überwindet sie einen (vertikalen) Höhenunterschied h und ihr Schwerpunkt erreicht dabei eine Geschwindigkeit v.

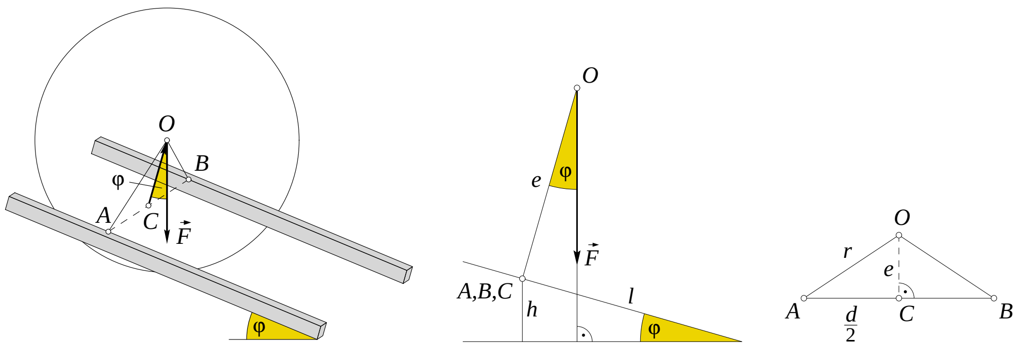
Bestimme den Abstand d so, dass die Geschwindigkeit v der Kugel gerade halb so groß ist, wie die eines aus derselben Höhe h frei herabfallenden Körpers!

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung von Aufgabe 9:

Zunächst zur Geometrie der Anordnung: Im Bild unten links sind die wichtigen Punkte eingezeichnet: O ist der Kugelmittelpunkt, in ihm greift die Gewichtskraft $\boldsymbol{F}$ der Kugel an, A, B sind die Berührungspunkte der Kugeloberfläche mit den Stangen (die Achse AB ist dabei die momentane Rotationsachse) und C ist der Mittelpunkt von $\overline{AB}$. Der Winkel der Stangen gegenüber der Horizontalen sei φ, dieser tritt nochmal als eingeschlossener Winkel zwischen der Geraden OC und der (senkrechten) Wirkungslinie von $\boldsymbol{F}$ auf (siehe mittleres Bild). Die Schnittebene durch die Punkte O, A, B und C ist im rechten Bild gezeigt. Hier ist $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = r$, $|\overline{AC}| = |\overline{BC}| = \frac{d}{2}$. Der Abstand $|\overline{OC}|$ sei mit e bezeichnet. Aus dem Bild ergibt sich

$$e = \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}}. \tag{1}$$



Wir präsentieren im Folgenden zwei unterschiedliche Lösungswege für diese Aufgabe: *1.* mit dem Energieerhaltungssatz und *2.* mit der Bewegungsgleichung. m sei im Folgenden die Masse der Kugel und g die Fallbeschleunigung.

1. Lösung mit dem Energieerhaltungssatz: Wir nehmen an, dass die potenzielle Energie der ruhenden Kugel zu Beginn der Bewegung

$$E_{\text{pot}} = mgh \tag{2}$$

beträgt, wobei

$$h = l \sin\varphi \tag{3}$$

der vertikale Höhenunterschied ist, den die Kugel zurücklegt (s. obiges mittleres Bild).

Nachfolgend gibt es zwei Varianten, je nachdem, wie die kinetische Energie eingeführt wird. In der ersten Variante *1.1* wird die gesamte kinetische Energie, die die Kugel am Ende der Herabrollstrecke erreicht, aufgespalten in einen translatorischen Anteil

$$E_{\text{kin,T}} = \frac{1}{2}mv^2, \tag{4}$$

der für den Schwerpunkt gilt, und die Rotationsenergie

$$E_{\text{rot,S}} = \frac{1}{2}J_{\text{S}}\,\omega^2 = \frac{1}{5}mr^2\,\frac{v^2}{e^2} = \frac{1}{5}mv^2\,\frac{r^2}{e^2} \tag{5}$$

um die Schwerpunktachse. Dabei wurde die sog. *Rollbedingung* benutzt, die für eine schlupffreie (nichtrutschende) Bewegung die Umrechnung der Winkelgeschwindigkeit ω in die translatorische Geschwindigkeit v gestattet:

$$v = e\omega \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \frac{v}{e}. \tag{6}$$

Außerdem wurde in (5) noch der bekannte Ausdruck für das Trägheitsmoment einer homogenen Kugel bei Rotation um eine Schwerpunktachse

$$J_{\mathrm{S}} = \frac{2}{5}mr^2 \tag{7}$$

eingesetzt.

Dann lautet der Energieerhaltungssatz mit (2)–(5)

$$E_{\mathrm{pot}} = E_{\mathrm{kin,T}} + E_{\mathrm{rot,S}} \quad \Longrightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2\,\frac{r^2}{e^2} \tag{8}$$

$$gh = v^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\,\frac{r^2}{e^2}\right) \tag{9}$$

$$v^2 = \frac{2gh}{\left(1 + \frac{2}{5}\,\frac{r^2}{e^2}\right)}. \tag{10}$$

Dieses Ergebnis kann nun verglichen werden mit der bekannten Geschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{2gh} \qquad \text{oder} \qquad v_0^2 = 2gh \tag{11}$$

für die Endgeschwindigkeit eines aus der Höhe h herabfallenden Körpers. Wenn, wie gefordert, $v = \frac{1}{2}v_0$ gelten soll, folgt mit (10) und (11)

$$v^2 = \frac{1}{4}v_0^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2gh}{\left(1 + \frac{2}{5}\,\frac{r^2}{e^2}\right)} = \frac{1}{4}\cdot 2gh \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{5}\,\frac{r^2}{e^2} = 3 \quad \Longrightarrow \quad e^2 = \frac{2}{15}r^2. \tag{12}$$

Mit (1) ergibt sich schließlich

$$r^2 - \frac{1}{4}d^2 = \frac{2}{15}r^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{13}{15}r^2 = \frac{1}{4}d^2 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{d = \sqrt{\frac{52}{15}}\,r \approx 1{,}862\,r}. \tag{13}$$

In der zweiten Variante *1.2* bei der Anwendung des Energieerhaltungssatzes wird die gesamte kinetische Energie der Kugel als Rotationsenergie aufgefasst (also ohne den translatorischen Anteil (4) des Schwerpunktes),

$$E_{\mathrm{rot,AB}} = \frac{1}{2}J\omega^2, \tag{14}$$

wobei hier jedoch die Rotationsachse die Achse AB ist. Dadurch vergrößert sich das Trägheitsmoment von J_{S} auf J gemäß des STEINERschen Satzes

$$J = J_{\mathrm{S}} + me^2 = \frac{2}{5}mr^2 + me^2, \tag{15}$$

wobei e der Abstand der neuen Rotationsachse zur vorherigen Schwerpunktachse ist. Der Energieerhaltungssatz lautet hier mit (2), (6), (14) und (15)

$$E_{\mathrm{pot}} = E_{\mathrm{rot,AB}} \quad \Longrightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2 + me^2\right)\frac{v^2}{e^2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2\,\frac{r^2}{e^2}. \tag{16}$$

Dieses Ergebnis entspricht (8), womit der weitere Rechenweg genau derselbe wie oben ist.

2. Aufstellen und Lösen der Bewegungsgleichung: Sie lautet allgemein

$$M = J\alpha, \tag{17}$$

wobei M das wirkende Drehmoment, J das Trägheitsmoment der Kugel bei Rotation um die Achse AB und α die Winkelbeschleunigung ist.

Dann können wir den Betrag des Drehmomentes M aufschreiben:

$$M = |\overline{OC}| \cdot F \sin\varphi = e \cdot mg \sin\varphi. \tag{18}$$

Beim Trägheitsmoment J in (17) ist zu beachten, dass die Rotationsachse die Achse AB ist, und somit der Ausdruck (15) hier eingesetzt werden muss. Für die Winkelbeschleunigung α gilt, analog zu (6):

$$\alpha = \frac{a}{e}, \tag{19}$$

wobei a die (translatorische) Beschleunigung des Schwerpunktes O auf der Bahn ist. Die Gleichungen (18), (15), (19) in (17) eingesetzt, ergibt nach a aufgelöst:

$$a = \frac{e^2 \sin\varphi}{\frac{2}{5}r^2 + e^2}\, g = \text{const}. \tag{20}$$

Das bedeutet, dass es sich um eine *gleichmäßig beschleunigte* Bewegung handelt. Wir dürfen also im Weiteren das bekannte Geschwindigkeits-Beschleunigungsgesetz in der Form

$$v^2 = 2al = \frac{2ah}{\sin\varphi} \tag{21}$$

verwenden, wobei (3) verwendet wurde. Gleichung (20) in (21) eingesetzt, liefert

$$v^2 = \frac{e^2}{\frac{2}{5}r^2 + e^2}\, 2gh = \frac{2gh}{\left(1 + \frac{2}{5}\frac{r^2}{e^2}\right)}. \tag{22}$$

Dies ist genau der Ausdruck (10) oben, und wir können auf den weiteren Rechenweg dort verweisen.

Punktverteilung:

- 1,0 Punkte für eine korrekte Herleitung und das richtige Endergebnis
- 0,6 – 0,8 Punkte: Ansatz korrekt, Großteil der Rechnung richtig; ein bis zwei spezifische Umrechnungs- oder geometrische Fehler
- 0,2 – 0,3 Punkte: Ansatz (z. B. Energieerhaltung) korrekt, jedoch frühe Rechenfehler, die eine Nachvollziehbarkeit der weiteren Schritte verhindern