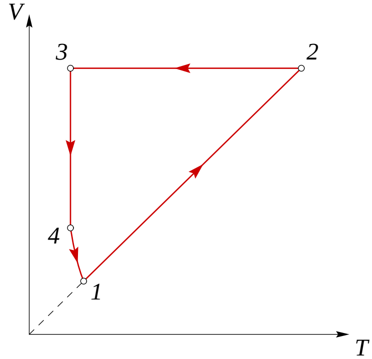
Physik-Marathon 2024

– Aufgabe 7 –

(17. Juni – 23. Juni)

Ein ideales Gas durchläuft einen Kreisprozess $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ in vier Schritten, wie er im folgenden Volumen-Temperatur-Diagramm skizziert ist:



Dabei ist $4 \to 1$ eine adiabatische Zustandsänderung mit dem Adiabatenexponenten $\varkappa$. Die Verhältnisse der Volumina seien $\varepsilon_{31} = \frac{V_3}{V_1}$ und $\varepsilon_{41} = \frac{V_4}{V_1}$.

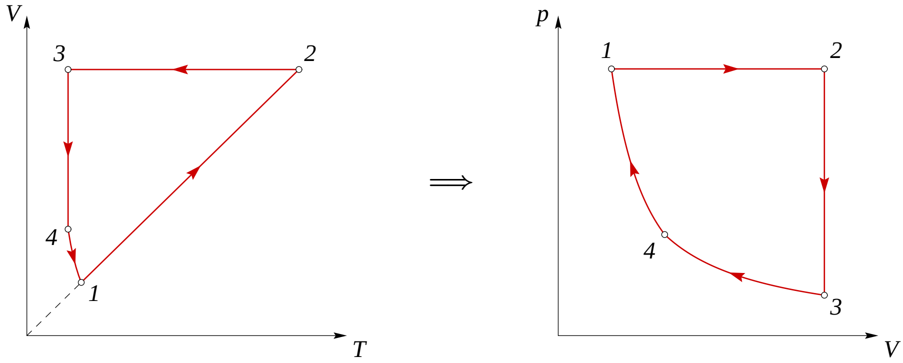
Berechne den thermischen Wirkungsgrad dieser Wärmekraftmaschine in Abhängigkeit von ε_{31}, ε_{41} und $\varkappa$!

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung von Aufgabe 7:

Wir zeichnen das vorgegebene VT-Diagramm in ein gewohnteres pV-Diagramm um. Im linken Bild unten sind folgende Zustandsänderungen zu erkennen:

$1 \to 2$: isobare Expansion (wegen des 1. GAY-LUSSACschen Gesetzes $V \sim T$ ist dies eine Gerade, die durch den Ursprung geht),
$2 \to 3$: isochore Abkühlung,
$3 \to 4$: isotherme Kompression,
$4 \to 1$: adiabatische Kompression.



Dies führt zu obigem rechten pV-Diagramm. Wir berechnen nun alle Volumenarbeiten W, Änderungen der inneren Energie ΔU sowie die ausgetauschten Wärmen Q[†]:

$$W_{12} = -p_1(V_2 - V_1) < 0, \quad \Delta U_{12} = \frac{nR}{\varkappa - 1}(T_2 - T_1) > 0, \quad Q_{12} = \Delta U_{12} - W_{12} > 0 \tag{1}$$

$$W_{23} = 0, \quad \Delta U_{23} = \frac{nR}{\varkappa - 1}(T_3 - T_2) < 0, \quad Q_{23} = \Delta U_{23} < 0 \tag{2}$$

$$W_{34} = -nRT_3 \ln \frac{V_4}{V_3} > 0, \quad \Delta U_{34} = 0, \quad Q_{34} = -W_{34} < 0 \tag{3}$$

$$W_{41} = \frac{nR}{\varkappa - 1}(T_1 - T_4) > 0, \quad \Delta U_{41} = \frac{nR}{\varkappa - 1}(T_1 - T_4) > 0, \quad Q_{41} = 0. \tag{4}$$

Um den Wirkungsgrad mithilfe von

$$\eta = \frac{|W|}{Q_{\text{zu}}} = 1 - \frac{|Q_{\text{ab}}|}{Q_{\text{zu}}} \tag{5}$$

zu berechnen, benötigen wir entweder die Kreisprozessarbeit

$$W = W_{12} + W_{34} + W_{41} \tag{6}$$

oder die insgesamt abgegebene Wärme

$$Q_{\text{ab}} = Q_{23} + Q_{34} \tag{7}$$

sowie die (einzige) zugeführte Wärme

$$Q_{\text{zu}} = Q_{12}. \tag{8}$$

[†]Wir folgen hier der Vorzeichenkonvention: Vom Gas verrichtete Volumenarbeiten zählen negativ, am Gas verrichtete positiv, eine Erwärmung des Gases hat $\Delta U > 0$ zur Folge, entsprechend ist eine Abkühlung durch $\Delta U < 0$ gekennzeichnet und eine dem Gas zugeführte Wärme zählt positiv, eine abgeführte Wärme negativ.

Für die Kreisprozessarbeit W ergibt sich aus (6) unter Verwendung von (1), (3) und (4)

$$\begin{aligned}
W &= -p_1(V_2 - V_1) - nRT_3 \ln \frac{V_4}{V_3} + \frac{nR}{\varkappa - 1}(T_1 - T_4) \\
&= -p_1 V_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) - nRT_3 \ln \frac{V_4}{V_3} + \frac{nR}{\varkappa - 1}(T_1 - T_4) \\
&= -nRT_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) - nRT_1 \frac{T_3}{T_1} \ln \frac{V_4}{V_3} + \frac{nRT_1}{\varkappa - 1}\left(1 - \frac{T_4}{T_1}\right) \\
&= -nRT_1 \left[\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) + \frac{T_3}{T_1} \ln \frac{V_4}{V_3} - \frac{1}{\varkappa - 1}\left(1 - \frac{T_4}{T_1}\right)\right], \qquad (9)
\end{aligned}$$

für die abgegebene Wärme Q_{ab} aus (7) unter Verwendung von (2) und (3)

$$\begin{aligned}
Q_{\text{ab}} &= \frac{nR}{\varkappa - 1}(T_3 - T_2) + nRT_3 \ln \frac{V_4}{V_3} \\
&= \frac{nRT_1}{\varkappa - 1}\left(\frac{T_3}{T_1} - \frac{T_2}{T_1}\right) + nRT_1 \frac{T_3}{T_1} \ln \frac{V_4}{V_3} \\
&= -nRT_1 \left[\frac{1}{\varkappa - 1}\left(\frac{T_2}{T_1} - \frac{T_3}{T_1}\right) - \frac{T_3}{T_1} \ln \frac{V_4}{V_3}\right], \qquad (10)
\end{aligned}$$

sowie für die zugeführte Wärme Q_{zu} aus (8) unter Verwendung von (1)

$$\begin{aligned}
Q_{\text{zu}} &= \frac{nR}{\varkappa - 1}(T_2 - T_1) + p_1(V_2 - V_1) \\
&= \frac{nRT_1}{\varkappa - 1}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) + p_1 V_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) = \frac{nRT_1}{\varkappa - 1}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) + nRT_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) \\
&= nRT_1 \left[\frac{1}{\varkappa - 1}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) + \left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right)\right]. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Nun können entweder (9) und (11) oder (10) und (11) zur Berechnung des Wirkungsgrades verwendet werden. Somit erhalten wir mit (9), (11) und $\frac{V_3}{V_1}(= \frac{V_2}{V_1}) = \varepsilon_{31}$, $\frac{V_4}{V_1} = \varepsilon_{41}$ und $\frac{V_4}{V_3} = \frac{\varepsilon_{41}}{\varepsilon_{31}}$:

$$\eta = \frac{|W|}{Q_{\text{zu}}} = \frac{\frac{V_2}{V_1} - 1 + \frac{T_3}{T_1} \ln \frac{V_4}{V_3} - \frac{1}{\varkappa-1} + \frac{1}{\varkappa-1}\frac{T_4}{T_1}}{\frac{1}{\varkappa-1}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) + \left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right)} = \frac{\varepsilon_{31} + \frac{T_3}{T_1} \ln \frac{\varepsilon_{41}}{\varepsilon_{31}} + \frac{1}{\varkappa-1}\left(\frac{T_4}{T_1} - \varkappa\right)}{\frac{1}{\varkappa-1}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) + \varepsilon_{31} - 1}. \qquad (12)$$

In (12) müssen nun nur noch die Quotienten der Temperaturen $\frac{T_2}{T_1}$, $\frac{T_3}{T_1} = \frac{T_4}{T_1}$ durch ε_{31} und ε_{41} ersetzt werden. Dazu wird das 1. GAY-LUSSACsche Gesetz

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = \varepsilon_{31} \qquad \text{(da } 1 \to 2 \text{ ein isobarer Prozess ist)} \qquad (13)$$

und die POISSONsche Adiabatengleichung

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\varkappa - 1} = \varepsilon_{41}^{1-\varkappa} \qquad \text{(da } 4 \to 1 \text{ ein adiabatischer Prozess ist)} \qquad (14)$$

herangezogen.

Gleichung (13) und (14) in (12) eingesetzt, liefert das Ergebnis

$$\eta = \frac{\varepsilon_{31} + \varepsilon_{41}^{1-\varkappa} \ln \dfrac{\varepsilon_{41}}{\varepsilon_{31}} + \dfrac{1}{\varkappa - 1}\left(\varepsilon_{41}^{1-\varkappa} - \varkappa\right)}{\dfrac{\varkappa}{\varkappa - 1}(\varepsilon_{31} - 1)} \tag{15}$$

$$= \frac{(\varkappa - 1)\left(\varepsilon_{31} + \varepsilon_{41}^{1-\varkappa} \ln \dfrac{\varepsilon_{41}}{\varepsilon_{31}}\right) + \varepsilon_{41}^{1-\varkappa} - \varkappa}{\varkappa(\varepsilon_{31} - 1)} \tag{16}$$

$$= 1 - \frac{\varepsilon_{31} - \varepsilon_{41}^{1-\varkappa}\left[(\varkappa - 1)\ln \dfrac{\varepsilon_{41}}{\varepsilon_{31}} + 1\right]}{\varkappa(\varepsilon_{31} - 1)} \tag{17}$$

$$= 1 - \frac{\varepsilon_{31}\varepsilon_{41}^{\varkappa-1} - (\varkappa - 1)\ln \dfrac{\varepsilon_{41}}{\varepsilon_{31}} - 1}{\varkappa\varepsilon_{41}^{\varkappa-1}(\varepsilon_{31} - 1)} \tag{18}$$

$$= 1 - \frac{\varepsilon_{31}\varepsilon_{41}^{\varkappa-1} + (\varkappa - 1)\ln \dfrac{\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{41}} - 1}{\varkappa\varepsilon_{41}^{\varkappa-1}(\varepsilon_{31} - 1)}. \tag{19}$$

Punktverteilung:

- 0,15 Punkte für die richtige Identifizierung der drei Zustandsänderungen ($1 \to 2$ isobar, $2 \to 3$ isochor und $3 \to 4$ isotherm)
- 0,1 Punkte für den Wirkungsgrad (5)
- 0,3 Punkte für die Kreisprozessarbeit W (9) oder die abgegebene Wärme Q_{ab} (10)
- 0,2 Punkte für die zugeführte Wärme Q_{zu} (11)
- 0,2 Punkte für das richtige Ergebnis (15)
- keine weiteren Punkte außer den obigen 0,15 Punkten, wenn von vornherein angenommen wurde, dass es sich um einen CARNOT-Kreisprozess handelt