

WILHELM UND ELSE
HERAEUS-STIFTUNG



Physik-Marathon 2024

– Aufgabe 6 –



(10. Juni – 16. Juni)

Angenommen, ein ungewöhnliches, hypothetisches Kraftgesetz bewirkt, dass ein senkrechter Wurf einer Punktmasse nach oben so verläuft:

Beträgt am Startort $x = 0$ zur Zeit $t = 0$ die Anfangsgeschwindigkeit v_0 , nimmt die momentane Geschwindigkeit $v(t)$ im weiteren Verlauf linear mit dem zurückgelegten Weg $x(t)$ ab. Reibungs- und andere Kräfte treten hierbei nicht auf.

Berechne die Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit für den aufsteigenden Teil des Wurfes!

 **Lösung** und **Punktverteilung** auf der Rückseite.

Lösung von Aufgabe 6:

Die Kinematik wird von den vier physikalischen Größen Zeit t , Weg s (oder Koordinate x), Geschwindigkeit $v = \frac{dx}{dt}$ und Beschleunigung $a = \frac{dv}{dt}$ beherrscht, zwischen denen sich insgesamt 12 Funktionen angeben lassen, also etwa $x(t)$, $x(v)$, $x(a)$, $v(t)$, $v(x)$, $v(a)$, usw.

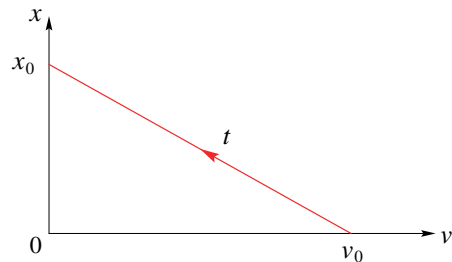
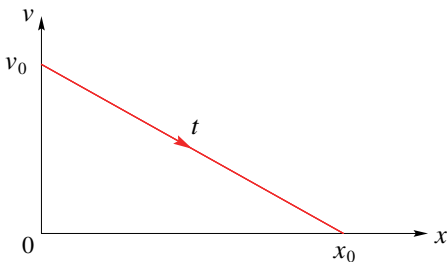
Wir beschränken uns hier von vornherein auf eine eindimensionale Bewegung, schreiben somit x anstelle von s .

In dieser Aufgabe ist über zwei dieser Größen, x und v , etwas vorgegeben, der Zusammenhang zwischen den anderen beiden, a und t , soll herausgefunden werden.

Offenbar ist die Funktion $v(x)$ eine linear fallende Funktion und damit gegeben durch

$$v(x) = v_0 \left(1 - \frac{x}{x_0} \right) = \frac{v_0}{x_0} (x_0 - x). \quad (1)$$

Dabei ist x_0 der insgesamt zurückgelegte Weg, s. folgendes Bild links:



Ebenso lässt sich die Umkehrfunktion errechnen (s. Bild rechts):

$$x(v) = x_0 \left(1 - \frac{v}{v_0} \right) = \frac{x_0}{v_0} (v_0 - v). \quad (2)$$

Der Pfeil in beiden Bildern gibt die voranschreitende Zeit an, die hier nur ein Parameter auf beiden Geradenstücken ist.

Um nun die Zeit mit ins Spiel zu bringen, muss eine der bekannten allgemeingültigen Beziehungen $v = \frac{dx}{dt}$ oder $a = \frac{dv}{dt}$ angewendet werden[†]. Versuchen wir es mit

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dv} \cdot \frac{dv}{dt} = -\frac{x_0}{v_0} \cdot \frac{dv}{dt}, \quad (3)$$

wobei die Ableitung $\frac{dx}{dv}$ aus (2) berechnet wurde. Der „Trick“ besteht hier darin, dass über die verkettete Funktion $x(v(t))$ die Kettenregel dafür sorgt, dass die gegebenen Funktionen (1) oder (2) Berücksichtigung finden. Gleichung (3) ist nun eine Differenzialgleichung 1. Ordnung für die Funktion $v = v(t)$, die mithilfe der Methode der Trennung der Veränderlichen gelöst werden kann. Aus (3) folgt weiter:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{v} = -\frac{v_0}{x_0} &\implies \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\frac{v_0}{x_0} \int_0^t dt = -\frac{v_0 t}{x_0} \\ \implies \ln \frac{v}{v_0} = -\frac{v_0 t}{x_0} &\implies v(t) = v_0 e^{-\frac{v_0 t}{x_0}} \end{aligned} \quad (4)$$

[†]Mit Formeln wie $v = \frac{x}{t}$ oder $x = \frac{a}{2}t^2$ weiterzurechnen, ist von vornherein falsch, da sie eine gleichförmige oder gleichmäßig beschleunigte Bewegung voraussetzen, was hier nicht der Fall ist.

Damit ist $v(t)$ berechnet, das Ergebnis ist eine exponentiell abklingende Funktion. Dies bedeutet insbesondere, dass der Wurf nach oben unendlich lange dauert (bis also $v = 0$ erreicht wird). **Es gibt hier keinen absteigenden Teil des Wurfes.** Was für ein seltsames Kraftgesetz!

Die gesuchte Beschleunigung $a(t)$ auszurechnen, erfordert nur eine weitere Differenziation:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\frac{v_0^2}{x_0} e^{-\frac{v_0 t}{x_0}}. \quad (5)$$

Schließlich ist evtl. noch die Funktion $x(t)$ von Interesse. Aus (4) folgt:

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = -x_0 e^{-\frac{v_0 t}{x_0}} \Big|_0^t = x_0 \left(1 - e^{-\frac{v_0 t}{x_0}}\right). \quad (6)$$

Der Weg nähert sich also exponentiell der maximalen Wurfhöhe x_0 an, während Geschwindigkeit und Zeit betragsmäßig exponentiell gegen Null gehen.

Alternativer Ansatz:

In (1) wurde mit x_0 der insgesamt zurückgelegte Weg als freier Parameter eingeführt. Er bestimmt in beiden Diagrammen vorn den Anstieg der Geraden. Dies kann alternativ auch auf andere Weise geschehen, z. B. durch

$$v(x) = v_0 - \lambda x \quad (7)$$

mit dem Parameter $\lambda > 0$. Durch Vergleich von (1) und (6) folgt

$$\lambda = \frac{v_0}{x_0} \quad \text{oder} \quad x_0 = \frac{v_0}{\lambda}. \quad (8)$$

Damit schreibt sich die DGL (3) als

$$v = -\lambda \frac{dv}{dt}, \quad v(t=0) = v_0, \quad (9)$$

deren Lösung nun anstelle von (4)

$$v(t) = v_0 e^{-\lambda t} \quad (10)$$

lautet. Schließlich erhalten wir hier für die gesuchte Beschleunigung

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\lambda v_0 e^{-\lambda t} \quad (11)$$

bzw. für den zurückgelegten Weg

$$x(t) = \frac{v_0}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda t}\right). \quad (12)$$

Numerische Behandlung der Aufgabe:

Wer eine Differenzialgleichung nicht exakt lösen möchte oder nur eine einfache Plausibilitätsprüfung der analytischen Rechnung benötigt, kann dies u. a. mit einem einfachen Zeitschrittverfahren nach EULER-CAUCHY durchführen, wie nachfolgend gezeigt. Dabei wird die kontinuierliche Dynamik des physikalischen Geschehens durch Einführung beliebig kleiner Zeitschritte diskretisiert.

Im einfachsten Fall betrachten wir äquidistante Zeitpunkte $t_k = k \cdot h$, ($k = 0, 1, 2, \dots$), wobei h die frei wählbare Zeitdauer der Zeitschritte ist. Lautet nun im allgemeinen Fall die DGL für die Funktion $y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (13)$$

mit der Anfangsbedingung $y_0 = y(x_0)$, so lassen sich alle weiteren Werte rekursiv durch das explizite EULERSche Polygonzugverfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \quad (14)$$

berechnen.[‡]

In unserer Aufgabe betrachten wir die Funktion $x(t)$, deren DGL durch (7) gegeben ist:

$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 - \lambda x. \quad (15)$$

Die Funktion f auf der rechten Seite von (13) ist $f(t, x) = v_0 - \lambda x$, womit das Verfahren (14) lautet:

$$x_{k+1} = x_k + h(v_0 - \lambda x_k), \quad (\text{mit } x_0 = 0 \text{ als Anfangswert}). \quad (16)$$

Für die Geschwindigkeit bekommen wir mit (15):

$$v_{k+1} = v_0 - \lambda x_k, \quad (\text{mit } v_0 = v_0 \text{ als Anfangswert}), \quad (17)$$

und für die Beschleunigung $a = \frac{dv}{dt} = -\lambda v$:

$$a_{k+1} = -\lambda v_k \quad (\text{mit } a_0 = -\lambda v_0 \text{ als Anfangswert}). \quad (18)$$

Dieses Verfahren (16)–(18) probieren wir jetzt für folgendes Zahlenbeispiel aus:

$$v_0 = 1,0 \text{ m s}^{-1}, \quad \lambda = 0,5 \text{ s}^{-1}, \quad h = 1,0 \text{ s}. \quad (19)$$

(Die Werte in der folgenden Tabelle lassen sich damit noch bequem mithilfe eines Taschenrechners ermitteln.)

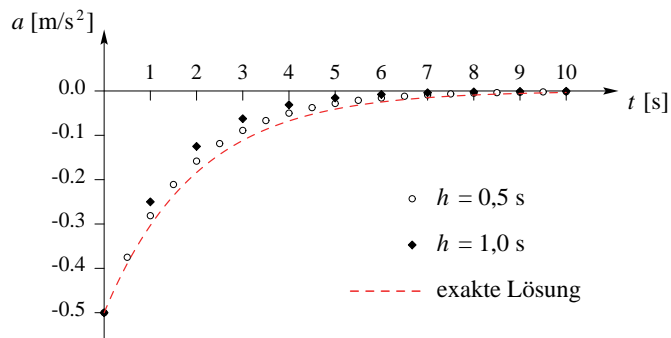
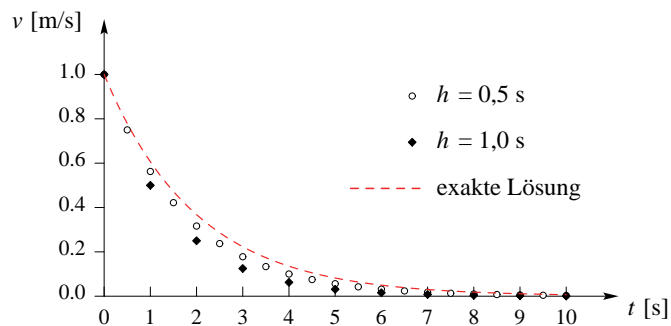
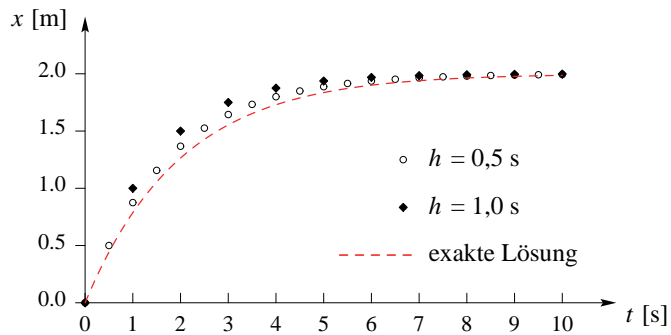
Wir erhalten für die ersten 10 Zeitschritte:

k	t_k in s	x_k in m	v_k in m s^{-1}	a_k in m s^{-2}	x_{exakt} in m	v_{exakt} in m s^{-1}	a_{exakt} in m s^{-2}
0	0.000000	0.000000	1.000000	-0.500000	0.000000	1.000000	-0.500000
1	1.000000	1.000000	0.500000	-0.250000	0.786939	0.606531	-0.303265
2	2.000000	1.500000	0.250000	-0.125000	1.264241	0.367879	-0.183940
3	3.000000	1.750000	0.125000	-0.062500	1.553740	0.223130	-0.111565
4	4.000000	1.875000	0.062500	-0.031250	1.729329	0.135335	-0.067668
5	5.000000	1.937500	0.031250	-0.015625	1.835830	0.082085	-0.041042
6	6.000000	1.968750	0.015625	-0.007812	1.900426	0.049787	-0.024894
7	7.000000	1.984375	0.007812	-0.003906	1.939605	0.030197	-0.015099
8	8.000000	1.992188	0.003906	-0.001953	1.963369	0.018316	-0.009158
9	9.000000	1.996094	0.001953	-0.000977	1.977782	0.011109	-0.005554
10	10.000000	1.998047	0.000977	-0.000488	1.986524	0.006738	-0.003369

Die Schrittweite wurde mit $h = 1,0 \text{ s}$ absichtlich so groß gewählt, dass die Abweichungen von den exakten analytischen Lösungen (12), (10) und (11) noch deutlich sichtbar sind.

[‡]Beim expliziten EULER-Verfahren wird das neue y_{k+1} direkt (explizit) aus den Werten des vorangegangenen Zeitschrittes $f(x_k, y_k)$ nach (14) berechnet. Beim impliziten EULER-Verfahren lautet die Vorschrift dagegen $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$. Dies erfordert i. Allg. immer die Auflösung eines nichtlinearen Gleichungssystems. Lohn für den höheren Aufwand ist eine wesentlich bessere Konvergenz der Lösung.

In den folgenden drei Diagrammen sind die Ergebnisse des expliziten EULER-Verfahrens im Zeitintervall $0 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$ für zwei verschiedene Schrittweiten ($h = 0,5 \text{ s}$ und $h = 1,0 \text{ s}$) dargestellt:



Es ist deutlich zu erkennen, dass die Konvergenz an die analytische Lösung mit abnehmender Schrittweite besser wird.

Punktverteilung:

- 0,8 Punkte für die richtige Geschwindigkeit (4) oder (10)
- 0,2 Punkte für die richtige Beschleunigung (5) oder (11)