Physik-Marathon 2024

– Aufgabe 5 –

(3. Juni – 9. Juni)

Die Strom-Spannungs-Kennlinie eines handelsüblichen Solarmoduls kann in sehr guter Näherung durch die Funktion

$$I(U) = I_0 - I_1\,\mathrm{e}^{kU^4} \tag{1}$$

mit den Parametern $I_0 = 8{,}6\ \mathrm{A}$, $I_1 = 1{,}0\ \mathrm{A}$ und $k = 8 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{V}^{-4}$ beschrieben werden. Dabei ist I die dem Modul entnehmbare Stromstärke und U die Klemmenspannung.

a) Skizziere die $I(U)$-Kennlinie! Berechne aus (1) den Kurzschlussstrom I_K (in A) und die Leerlaufspannung U_L (in V) des Moduls! Runde beide Werte auf zwei Stellen nach dem Komma.

b) Berechne den Betrag des (differenziellen) Innenwiderstands r_L des Moduls bei der Leerlaufspannung!

c) Ermittle mithilfe von (1) die Leistungskurve $P(U)$ und skizziere diese im Bereich $0\ \mathrm{V} \leq U \leq 23\ \mathrm{V}$!

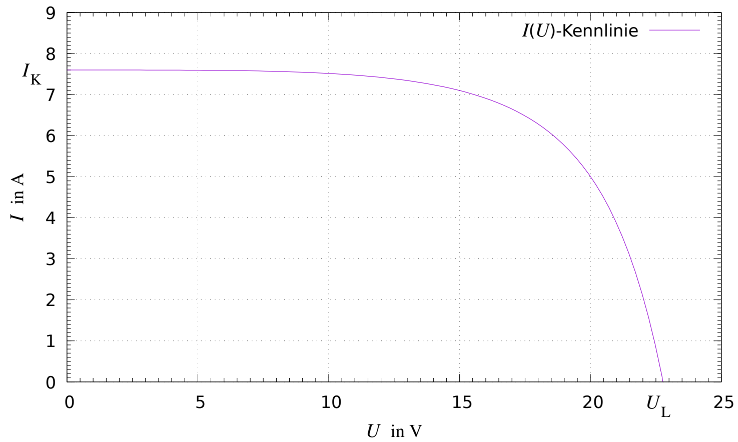
d) Bei welcher Klemmenspannung $\hat{U}$ (in V) kann das Modul seine maximale Leistung P_max abgeben? Wie groß ist P_max (in W)? Runde beide Werte auf zwei Stellen nach dem Komma.

e) Welchen Lastwiderstand R_a sollte ein Verbraucher haben, um die maximale Leistung P_max des Solarmoduls zu nutzen? Begründe dies!

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung von Aufgabe 5:

a) Das folgende Diagramm, das die $I(U)$-Kennlinie zeigt, wurde mit GNUPLOT erzeugt:



Der *Leerlauf* ist bei $I = 0$ zu erkennen (im Bild rechts der Schnittpunkt der Kurve mit der U-Achse). In diesem Fall ist kein Verbraucher an das Modul angeschlossen, sodass die maximale Klemmenspannung U_{L} anliegt. *Kurzschluss* ist dagegen durch $U = 0$ charakterisiert (im Bild links der Schnittpunkt der Kurve mit der I-Achse). Hier fließt der (maximal mögliche) Kurzschlusstrom I_{K} und die Klemmenspannung sinkt auf 0 V.

Zur Berechnung von I_{K} muss nur der Grenzwert der Kennlinie (1) für $U \to 0$ bestimmt werden, er ist

$$I_{\mathrm{K}} = \lim_{U\to 0} I(U) = \boldsymbol{I_0 - I_1 = 7{,}60\,\mathrm{A}}. \tag{1}$$

Die Leerlaufspannung U_{L} ergibt sich aus (1) durch Nullsetzen:

$$I_0 - I_1\,\mathrm{e}^{kU_{\mathrm{L}}^4} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{kU_{\mathrm{L}}^4} = \frac{I_0}{I_1} \quad\Longrightarrow\quad U_{\mathrm{L}} = \boldsymbol{\sqrt[4]{\frac{1}{k}\ln\frac{I_0}{I_1}} = 22{,}77\ \mathrm{V}}. \tag{2}$$

b) Anschaulich ist der differenzielle Innenwiderstand der reziproke Anstieg der Tangente an die obige Kurve im Leerlaufpunkt. Wir bilden also mit (2)

$$\frac{1}{r_{\mathrm{L}}} = \left.\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}U}\right|_{U=U_{\mathrm{L}}} = -4kU_{\mathrm{L}}^3 I_1\,\mathrm{e}^{kU_{\mathrm{L}}^4} = -4kU_{\mathrm{L}}^3 I_1 \frac{I_0}{I_1} = -4kI_0U_{\mathrm{L}}^3. \tag{3}$$

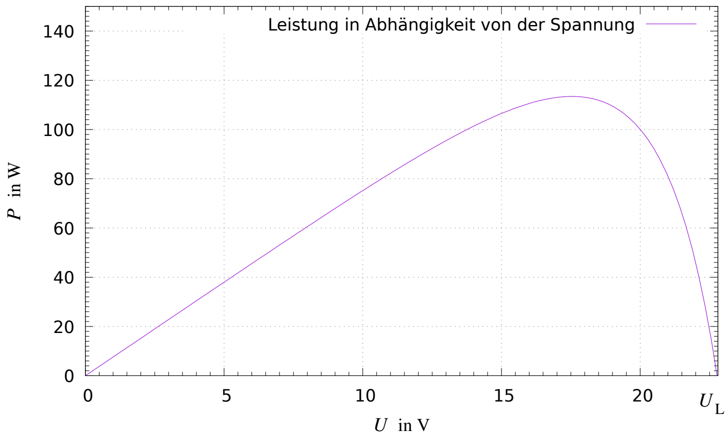
Mit den gegebenen Zahlenwerten erhalten wir

$$|r_{\mathrm{L}}| = \boldsymbol{308\ \mathrm{m}\Omega}. \tag{4}$$

c) Es gilt $P = UI$ und somit

$$P(U) = U\left(I_0 - I_1\,\mathrm{e}^{kU^4}\right). \tag{5}$$

Das nachfolgende Diagramm zeigt die Leistungskurve.



Die abgegebene Leistung ist im Leerlauf- und Kurzschlussfall gleich Null und nimmt zwischen den beiden Grenzfällen ein Maximum an.

d) Hierzu muss die erste Ableitung von (5) gleich Null gesetzt werden:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}U} = I_0 - I_1\,\mathrm{e}^{kU^4} - 4kU^4 I_1\,\mathrm{e}^{kU^4} = 0. \tag{6}$$

Dies ist eine transzendente Gleichung, die numerisch gelöst werden muss. Nehmen wir z. B. das Newton-Raphson-Verfahren zur Lösung von $f(U) = 0$,

$$U_{n+1} = U_n - \frac{f(U_n)}{f'(U_n)}, \tag{7}$$

mit

$$f(U) = I_0 - I_1\,\mathrm{e}^{kU^4} - 4kU^4 I_1\,\mathrm{e}^{kU^4} \tag{8}$$

$$f'(U) = -kU^3 I_1\,\mathrm{e}^{kU^4} - 16kU^3 I_1\,\mathrm{e}^{kU^4} - 16k^2U^7 I_1\,\mathrm{e}^{kU^4}, \tag{9}$$

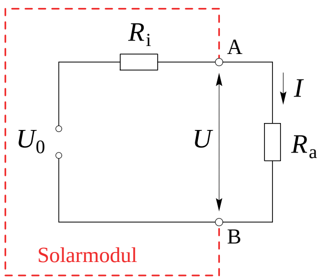
und dem Startwert $U_1 \approx 17\,\mathrm{V}$ aus der Leistungskurve, so erhalten wir nach einigen Schritten

$$\boldsymbol{\hat{U} = 17{,}54\,\mathrm{V}}. \tag{10}$$

Aus (5) folgt damit

$$P_{\max} = P(\hat{U}) = \hat{U}\left(I_0 - I_1\,\mathrm{e}^{k\hat{U}^4}\right) = \boldsymbol{113{,}44\,\mathrm{W}}. \tag{11}$$

e) Das folgende Bild zeigt die elektrische Schaltung mit dem äußeren Lastwiderstand R_a. Das Solarmodul (rot gestrichelter Kasten) besteht im Innern aus der EMK („elektromotorische Kraft“, Urspannung) U_0 und seinem Innenwiderstand R_i, an seinen Anschlussklemmen A und B ist R_a angeschlossen, und es fließt der Laststrom I.



Die Klemmenspannung U verringert sich durch den Laststrom von U_0 auf

$$U = U_0 - R_\mathrm{i} I \tag{12}$$

(innerer Teil des Solarmoduls), und für den Laststrom selbst gilt

$$I = \frac{U}{R_\mathrm{a}} = \frac{U_0}{R_\mathrm{i} + R_\mathrm{a}} \tag{13}$$

(äußerer Teil mit Verbraucher bzw. beide Teile). Die entnommene elektrische Leistung wird somit

$$P = UI = R_\mathrm{a} I^2 = \frac{R_\mathrm{a} U_0^2}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{a})^2}. \tag{14}$$

Sie erreicht ihr Maximum für

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R_\mathrm{a}} = \frac{R_\mathrm{i} - R_\mathrm{a}}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{a})^3}\, U_0^2 = 0, \tag{15}$$

d. h. immer dann, wenn

$$\boldsymbol{R_\mathrm{a} = R_\mathrm{i} = \frac{\hat{U}^2}{P_\mathrm{max}} = 2{,}71\ \Omega} \tag{16}$$

ist (*Leistungsanpassung*).

Punktverteilung:

- 0,05 Punkte für das Diagramm der $I(U)$-Kennlinie in a)
- 0,05 Punkte für den Kurzschlusstrom I_K (1) in a)
- 0,1 Punkte für die Leerlaufspannung U_L (2) in a)
- 0,2 Punkte für den Innenwiderstand $|r_\mathrm{L}|$ (4) in b)
- 0,1 Punkte für (5) in c)
- 0,1 Punkte für das Diagramm der Leistungskurve in c)
- 0,15 Punkte für die Spannung $\hat{U}$ (10) in d)
- 0,05 Punkte für die maximale Leistung P_max in d)
- 0,1 Punkte für die Begründung in e)
- 0,1 Punkte für die richtige Antwort $R_\mathrm{a} = R_\mathrm{i}$ (16) in e)