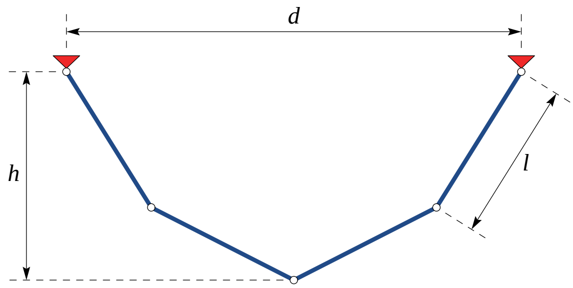
Physik-Marathon 2024

– Aufgabe 3 –

(20. Mai – 26. Mai)

Eine schwere Gliederkette mit vier identischen Gliedern ist an zwei Aufhängepunkten gleicher Höhe befestigt. Diese Aufhängepunkte haben einen horizontalen Abstand von $d = 4$ m. Die Länge jedes Kettengliedes beträgt $l = 2$ m. Die Kettenglieder haben eine homogene Masseverteilung und verformen sich nicht. Die fünf Gelenke werden als ideale Drehgelenke angenommen.

Das Bild zeigt die Anordnung mit den Abmessungen; es ist *nicht* maßstabsgerecht.

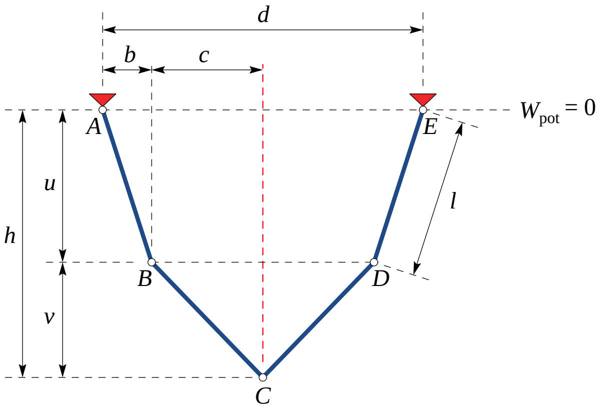


Wie weit hängt die Kette durch? Berechne die Länge h in Metern, gerundet auf drei Stellen nach dem Komma!

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung von Aufgabe 3:

Das folgende, jetzt maßstabsgerechte Bild zeigt die Anordnung mit den zusätzlichen Abmessungen b, c, u und v. Die Punkte, an denen sich die Gelenke befinden, seien A, B, C, D und E.



Die Mittelsenkrechte der Strecke AE ist offenbar eine Symmetrieachse, weshalb es genügt, die linke Hälfte der Anordnung zu betrachten, also die Stäbe AB und BC. Es gibt nun eine rein geometrische Bedingung, die erfüllt sein muss, nämlich, dass in horizontaler Richtung $b+c=\frac{d}{2}$ gilt:

$$b = \frac{d}{2} - c. \tag{1}$$

Andererseits gibt es einen physikalischen Grund, weshalb sich nur eine bestimmte Anordnung einstellt. Diese ist dadurch festgelegt, dass die potenzielle Energie W_{pot} aller Kettenglieder in der Stabilitätslage ein Minimum annehmen muss. Wenn wir das Nullniveau der potenziellen Energie auf die Höhe der Aufhängepunkte A und B legen, dann hat der Schwerpunkt des Stabes AB die Höhe $-\frac{u}{2}$ und der Schwerpunkt des Stabes BC die Höhe $-(u+\frac{v}{2})$.

Für die potenzielle Energie ist es hierbei unerheblich, welche (untereinander gleiche) Masse die Stäbe haben, es genügt festzustellen, dass W_{pot} proportional zur Summe beider Höhen ist:

$$W_{\text{pot}} \propto -\frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v. \tag{2}$$

Mit

$$u = \sqrt{l^2 - b^2}, \quad v = \sqrt{l^2 - c^2} \tag{3}$$

und (1) erhalten wir aus (2):

$$W_{\text{pot}} \propto -\frac{3}{2}\sqrt{l^2 - b^2} - \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - c^2} = -\frac{3}{2}\sqrt{l^2 - \left(\frac{d}{2} - c\right)^2} - \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - c^2} \tag{4}$$

$$\propto -3\sqrt{\left(l^2 - \frac{d^2}{4}\right) + dc - c^2} - \sqrt{l^2 - c^2} \tag{5}$$

$$\propto -3\sqrt{e^2 + dc - c^2} - \sqrt{l^2 - c^2}, \tag{6}$$

wobei zur Abkürzung

$$e^2 = l^2 - \frac{d^2}{4} \tag{7}$$

gesetzt wurde. Nun ist es nur noch eine einfache Extremwertaufgabe:

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{pot}}}{\mathrm{d}c} \propto -\frac{3(d-2c)}{\sqrt{e^2+dc-c^2}} + \frac{2c}{\sqrt{l^2-c^2}} \stackrel{!}{=} 0 \tag{8}$$

$$\Longrightarrow \quad 3(d-2c)\sqrt{l^2-c^2} = 2c\sqrt{e^2+dc-c^2} \tag{9}$$

$$\Longrightarrow \quad 9(d^2-4dc+4c^2)(l^2-c^2) = 4c^2(e^2+dc-c^2) \tag{10}$$

$$\Longrightarrow \quad 32c^4 - 32dc^3 + (9d^2+4e^2-36l^2)c^2 + 36l^2dc - 9d^2l^2 = 0 \tag{11}$$

$$\Longrightarrow \quad 32c^4 - 32dc^3 - 36e^2c^2 + 36l^2dc - 9d^2l^2 = 0. \tag{12}$$

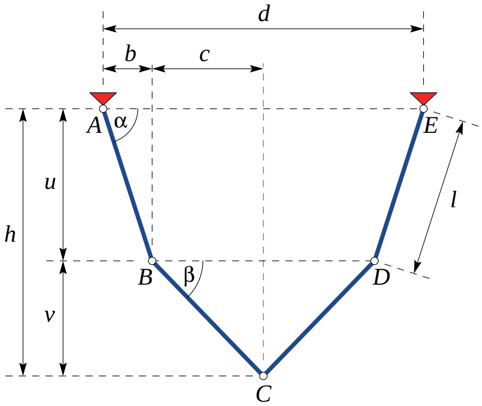
Dies ist eine Gleichung vierten Grades in c, die mit irgendeinem Hilfsmittel gelöst werden kann. Für unsere gegebenen Zahlenwerte ergibt sich zufällig $e = 0$, sodass der quadratische Term in c^2 verschwindet. Das vereinfacht die Lösung leider nicht (insbesondere lässt sich das Polynom nicht faktorisieren). Schließlich erhalten wir $c = 1{,}3881$ m. Die anderen Abmessungen sind: $b = 0{,}6119$ m, $u = 1{,}9041$ m und $v = 1{,}4398$ m.

Damit beträgt der gesuchte Wert†

$$h = u + v = \mathbf{3{,}344\ m}. \tag{13}$$

1. Alternative Lösung:

Jede konkrete Anordnung der vier Kettenglieder ist bei gegebenen, festen Werten von d und l durch zwei Parameter eindeutig bestimmt, diese sollen hier die Winkel α und β sein (s. folgendes Bild).



Anstelle von (1) gilt:

$$l\cos\alpha + l\cos\beta = \frac{d}{2} \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha + \cos\beta - \frac{d}{2l} = 0 \tag{14}$$

und anstelle von (2)

$$W_{\mathrm{pot}} \propto -\frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v \propto -3\sin\alpha - \sin\beta. \tag{15}$$

Wir suchen jetzt also das Minimum der Funktion (15) unter der Nebenbedingung (14).

Diese Aufgabe lässt sich mit der Methode der LAGRANGEschen Multiplikatoren lösen. Setzen wir also mit (15) und (14)

$$f(\alpha,\beta,\lambda) = -3\sin\alpha - \sin\beta - \lambda\left(\cos\alpha + \cos\beta - \frac{d}{2l}\right), \tag{16}$$

---

†Streng genommen muss noch anhand der zweiten Ableitung $\frac{\mathrm{d}^2 W_{\mathrm{pot}}}{\mathrm{d}c^2} > 0$ überprüft werden, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt. Wir verzichten hier darauf.

dann lauten die drei notwendigen Bedingungen für ein Minimum von f:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -3\cos\alpha + \lambda \sin\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 3\cot\alpha \tag{17}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = -\cos\beta + \lambda \sin\beta = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \cot\beta, \tag{18}$$

und die dritte Bedingung $\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0$ ist die Nebenbedingung (14) selbst.

Das Gleichungssystem, bestehend aus (17), (18) und (14) für die Variablen α, β und λ wird gelöst, indem wir $\cos\beta$ aus (18) berechnen:

$$\cot^2\beta = \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} = \frac{\cos^2\beta}{1-\cos^2\beta} \tag{19}$$

$$\Longrightarrow \quad \cos\beta = \frac{\cot\beta}{\sqrt{1+\cot^2\beta}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}. \tag{20}$$

Analog finden wir $\cos\alpha$ aus (17):

$$\cos\alpha = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}} = \frac{\frac{\lambda}{3}}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{9}}} = \frac{\lambda}{\sqrt{9+\lambda^2}}. \tag{21}$$

Nun können wir λ aus (14) mittels (19) und (20) berechnen:

$$g(\lambda) := \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{9+\lambda^2}} - \frac{d}{2l} = 0, \tag{22}$$

allerdings nicht auf analytischem Wege. Nehmen wir für unser konkretes Beispiel mit $\frac{d}{2l} = 1$ das Newton-Verfahren

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i - \frac{g(\lambda_i)}{g'(\lambda_i)}$$

mit

$$g'(\lambda) = (1+\lambda^2)^{-\frac{3}{2}} + 9\,(9+\lambda^2)^{-\frac{3}{2}},$$

erhalten wir nach einigen Iterationen mit dem Startwert $\lambda_1 = 1$ folgende Verbesserungen:

$$\lambda_2 = 0{,}9934, \quad \lambda_3 = 0{,}9880, \quad \lambda_4 = 0{,}9837, \quad \lambda_5 = 0{,}9801, \quad \ldots$$

Die Konvergenz ist nicht besonders gut, aber das Verfahren ist stabil und liefert schließlich nach sehr vielen Iterationen den Wert

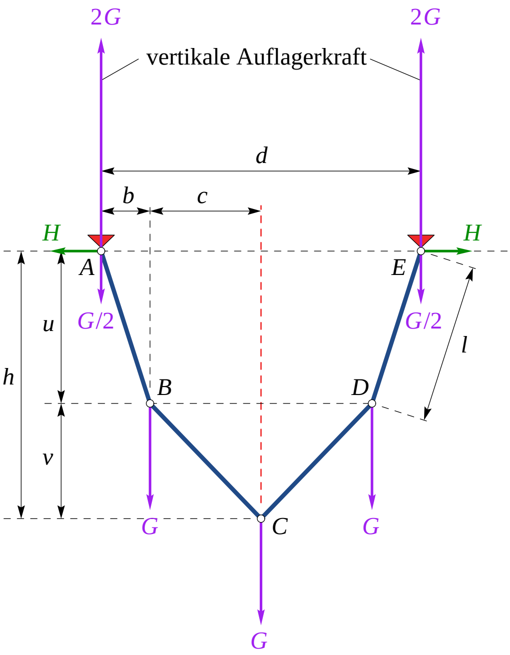
$$\lambda \approx 0{,}964\,066\,627\,85. \tag{23}$$

Nach (17) und (18) folgt daraus $\alpha = 72{,}1849\,^\circ$ und $\beta = 46{,}0481\,^\circ$. Damit beträgt der gesuchte Wert

$$h = l(\sin\alpha + \sin\beta) = \mathbf{3{,}344\ m}. \tag{24}$$

2. Alternative Lösung:

Anstelle der Stabsgewichtskräfte betrachten wir als statisches Ersatzsystem nun die Knotenkräfte. Die Ersatzstäbe werden dabei als gewichtslos angenommen. An den beiden Auflagern greifen dabei jeweils eine vertikale Kraft $2G$ (mit G als Gewichtskraft eines Kettengliedes) sowie eine horizontale Kraft H an, siehe nachfolgendes Bild:



Neben den geometrischen Bedingungen (1) und (3) müssen die physikalischen Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein, damit das System in Ruhe ist. Diese Bedingungen sind:

$$\text{Drehmoment um Knoten } B: \qquad 0 = \left(2 - \frac{1}{2}\right) Gb - Hu \tag{25}$$

$$\text{Drehmoment um Knoten } C: \qquad 0 = \left(2 - \frac{1}{2}\right) G(b+c) - Gc - H(u+v). \tag{26}$$

Aus (25) und (26) kann H eliminiert werden, wobei sich G herauskürzt. Es entsteht

$$3bv = cu \qquad \Longrightarrow \qquad 9b^2v^2 = c^2u^2. \tag{27}$$

Setzen wir nach (3) $u^2 = l^2 - b^2$ und $v^2 = l^2 - c^2$ in (27) ein, ergibt sich

$$9b^2l^2 = c^2l^2 + 8b^2c^2. \tag{28}$$

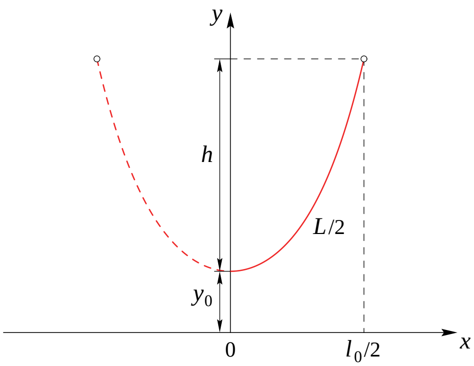
Hierin (1) eingesetzt, liefert schließlich genau (12), nämlich die Gleichung 4. Grades in c. Der weitere Lösungsweg ist danach wie oben beschrieben.

Näherungslösung durch die ideale Kettenlinie:

Unsere Aufgabe erinnert an die bekannte Kettenlinie, die die Form eines aus vielen kleinen Stücken aufgebauten *Seils* beschreibt, welches unter seinem Eigengewicht genau diese Form annimmt. Die Kettenlinie kann dabei nur eine Näherung sein, weil sie im Kontext der vorliegenden Aufgabe unendlich viele Kettenglieder mit unendlicher kleiner Länge voraussetzt. Diese Standardaufgabe der Technischen Mechanik hat für eine symmetrische Anordnung (d. h., beide Aufhängungspunkte des Seils haben diesselbe Höhe, wie hier) die Lösung

$$y(x) = y_0 \cosh\left(\frac{x}{y_0}\right), \quad -\frac{l_0}{2} \le x \le \frac{l_0}{2}, \tag{29}$$

wobei $\frac{l_0}{2}$ der halbe horizontale Abstand der Aufhängungspunkte und y_0 die Höhe des tiefsten Punktes des Seils ist, s. nachfolgendes Bild:



Im Bild bedeuten weiter: $\frac{L}{2}$ die halbe Länge des Seils und h der Größtdurchhang des Seils. Gewöhnlich sind l_0 und L gegeben und h ist gesucht. Wir gehen wie folgt vor: Die Bogenlänge der Kurve $y(x)$ in (29) zwischen $x = 0$ und $x = \frac{l_0}{2}$ beträgt

$$\frac{L}{2} = y_0 \sinh\left(\frac{l_0}{2y_0}\right) \quad \Longrightarrow \quad \sinh\left(\frac{l_0}{2y_0}\right) = \frac{L}{2y_0} = \frac{L}{l_0} \cdot \frac{l_0}{2y_0}. \tag{30}$$

Mit dem dimensionslosen Parameter

$$\xi = \frac{l_0}{2y_0} \tag{31}$$

schreibt sich (30) als

$$\sinh \xi = \frac{L}{l_0}\,\xi \quad \Longrightarrow \quad f(\xi) := \frac{\sinh \xi}{\xi} - \frac{L}{l_0} = 0. \tag{32}$$

Um nun y_0 und h zu berechnen, muss die transzendente Gleichung (32) für gegebene Werte von l_0 und L gelöst werden. Mit dem Newton-Raphson-Verfahren

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)}, \quad \xi_0 = 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{33}$$

erhalten wir mit $l_0 = d = 4$ m und $L = 4l = 8$ m nach wenigen Iterationen $\xi \approx 2{,}177319$ und damit nach (31) $y_0 = \frac{l_0}{2\xi} = 0{,}91856$ m. Schließlich kann mit (29) der Größtdurchhang h berechnet werden (s. obiges Bild):

$$h = y\left(\frac{l_0}{2}\right) - y_0 = y_0\left(\cosh\left(\frac{l_0}{2y_0}\right) - 1\right) = \frac{l_0}{2\xi}(\cosh \xi - 1) = \mathbf{3{,}185553\ m}. \tag{34}$$

Obwohl wir in unserer Aufgabe nur vier Kettenglieder vorzuliegen haben, beträgt die Abweichung zur exakten Lösung (13) hier nur ca. 14 cm.

Verallgemeinerung der 1. alternativen Lösung auf $2n$ Kettenglieder:

Als Abschluss verallgemeinern wir die Aufgabe so, dass wir $2n$ Kettenglieder zwischen die Aufhängungspunkte einbauen, aber so, dass ihre Gesamtlänge dieselbe ist wie die jetzige Länge von $4l = 8$ m (für $n = 2$). Damit beträgt die Länge jedes Gliedes im Folgenden

$$\hat{l} = \frac{4l}{2n} = \frac{2l}{n}. \tag{35}$$

Es genügt, nur eine Hälfte mit n Gliedern zu betrachten. Die Winkel α_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, sind diejenigen, die das i-te Kettenglied mit der Horizontalen einschließt (wie im obigen Bild), hier mit α_n oben an der Aufhängung und α_1 am untersten Glied. Dann lautet die Verallgemeinerung von (14) mit (35)

$$\sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i = \frac{d}{2\hat{l}} = \frac{nd}{4l}. \tag{36}$$

Für die zu minimierende potenzielle Energie müssen die Abstände der *Mittelpunkte* der Glieder (der Schwerpunkte als Repräsentanten für einen starren Körper) zur oberen Nulllinie aufaddiert werden:

$$W_{\text{pot}} \propto -\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\sin\alpha_i. \tag{37}$$

Damit gelangen wir in Anlehnung an (16) zu der zu minimierenden Funktion

$$f_n(\sin\alpha_1, \sin\alpha_2, \ldots, \sin\alpha_n, \lambda_n) = -\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\sin\alpha_i - \lambda_n\left(\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i - \frac{nd}{4l}\right). \tag{38}$$

Die Methode der LAGRANGEschen Multiplikatoren führt hier auf die Gleichungen

$$\cot\alpha_i = \frac{\lambda_n}{2i-1} \quad\Longrightarrow\quad \cos\alpha_i = \frac{\lambda_n}{\sqrt{(2i-1)^2+\lambda_n^2}} \tag{39}$$

$$\Longrightarrow\quad \sin\alpha_i = \frac{2i-1}{\sqrt{(2i-1)^2+\lambda_n^2}} \tag{40}$$

Mit (39) wird aus (36)

$$\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_n}{\sqrt{(2i-1)^2+\lambda_n^2}} = \frac{nd}{4l}. \tag{41}$$

Gleichung (41) ist die Verallgemeinerung von (22) vorn; aus ihr lässt sich λ_n für gegebenes n numerisch bestimmen. Nehmen wir hier auch $\frac{d}{4l} = \frac{1}{2}$ an, so erhalten wir folgende Werte für λ_n:

n	λ_n	h_n (in m)
2	0,96406 66279	3,343944
3	1,39000 20253	3,273063
4	1,83830 89967	3,236282
5	2,29477 07194	3,217484
6	2,75357 62356	3,207281
7	3,21295 24611	3,201276
8	3,67242 90918	3,197469
9	4,13189 62562	3,194905
10	4,59133 52645	3,193092
20	9,18487 23877	3,187412
50	22,96372 69073	3,185850
100	45,92789 57071	3,185627
200	91,85601 23758	3,185572
500	229,64018 56154	3,185556
1000	459,28041 54241	3,185554

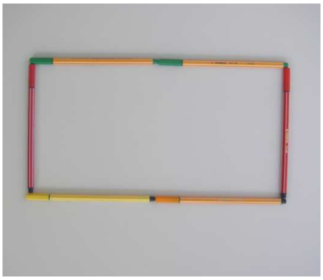
Die gesuchte Höhe h_n ergibt sich schließlich durch Aufsummation aller vertikalen Höhenunterschiede $\hat{l}\sin\alpha_i$, mit (40) also

$$h_n = \sum_{i=1}^{n}\hat{l}\sin\alpha_i = \frac{2l}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{\sqrt{(2i-1)^2+\lambda_n^2}}. \tag{42}$$

Die numerischen Werte von h_n sind in obiger Tabelle aufgeführt. Es ist sehr schön zu erkennen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} h_n$ tatsächlich gegen den Wert (34) $h = 3{,}185553$ m zu konvergieren scheint.

Bemerkungen:

1. Ohne umfangreiche Berechnungen anzustellen, kann man sich überlegen, dass folgende beide Schranken für die gesuchte Höhe h existieren: $h_\mathrm{u} = 2{,}000$ m als untere Schranke und $h_\mathrm{o} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4$ m $= 3{,}464$ m als obere Schranke, nämlich wenn man 6 Stifte nimmt und sie, wie im folgenden Bild gezeigt, auslegt (jeder Stift symbolisiert eine Länge von 2m und die Randpunkte der beiden oberen grünen Stifte kennzeichnen die Aufhängepunkte):



Das linke Bild entspricht h_u (wir nennen es das „U“), das rechte Bild h_o (wir nennen es das „V“) und das mittlere Bild könnte nahe an der tatsächlichen Lösung liegen. Dies alles kann man allein aus der Anschauung gewinnen, oder wenn z. B. das Problem mit Trinkhalmen oder Dachlatten einfach nachgebaut wird. Deshalb vergeben wir *keine* Teilpunkte, wenn also entweder $h \leq 2{,}000$ m oder $h > 3{,}464$ m als Lösung angegeben wurde.

2. Einige Teilnehmende legten die Enden der Kettenglieder auf die cosh-Funktion (29). Dieses Vorgehen ist bestenfalls nur eine grobe Näherung für die tatsächliche Lösung bei $n = 4$. Wir geben hierauf keinen Teilpunkt.

Punktverteilung:

- 1,0 Punkte, wenn der Zahlenwert in (13), 3,344 m, exakt so lautet
- 0,9 Punkte, wenn soweit alles richtig gerechnet wurde, nur nicht der Schwerpunkt, sondern ein Ende der Kettenglieder als Referenzpunkt für die potenzielle Energie genommen wurde
- 0,5 Punkte, wenn ersatzweise mit der idealen Kettenlinie gerechnet wurde und der Zahlenwert wie in (34) lautet
- 0,0 Punkte, wenn entweder $h \leq 2{,}000$ m oder $h > 3{,}464$ m als Lösung angegeben wurde, unabhängig davon, ob evtl. durchgeführte Berechnungen sinnvoll waren oder nicht, s. Bemerkung 1 oben
- 0,1 Punkte, wenn das „V“ gerechnet wurde (s. Bemerkung 1 oben) und damit $h = 3{,}464$ m als (falsche) Lösung angegeben wurde
- 0,3 Punkte, wenn (14) und (15) richtig aufgestellt wurden und ein von (24) abweichendes Ergebnis ermittelt wurde, das die Bedingung $2{,}000 \text{ m} < h \leq 3{,}464$ m erfüllt
- 0,3 Punkte, wenn die Kräftebilanz nicht richtig aufgestellt wurde, aber ein Ergebnis ermittelt wurde, das die Bedingung $2{,}000 \text{ m} < h \leq 3{,}464$ m erfüllt