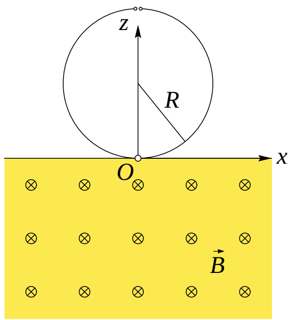
Physik-Marathon 2024

– Aufgabe 16 –

(30. September – 13. Oktober)

Eine kreisförmige Leiterschleife mit dem Radius R ruht in einer vertikalen x,z-Ebene. Ihr unterster Punkt berührt im Punkt O die Halbebene $z < 0$, in der ein homogenes Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ wirkt, welches in die Zeichenebene hinein gerichtet ist. Die obere Halbebene $z \geq 0$ ist feldfrei.

Das nachfolgende Bild veranschaulicht die Situation:



Nun beginnt die Leiterschleife zur Zeit $t = 0$ frei mit der Erdfallbeschleunigung g in das Magnetfeld zu fallen. Reibungskräfte bleiben dabei unberücksichtigt.

a) Berechne die in der Leiterschleife induzierte, zeitlich veränderliche Ringspannung $U(t)$!

b) Wie groß ist das Maximum von $|U(t)|$ während des freien Falls?
Benutze dabei die Zahlenwerte $B = 10\,\mathrm{mT}$, $R = 50\,\mathrm{cm}$ und $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

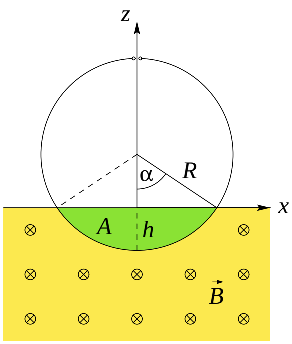
Lösung von Aufgabe 16:

a) Das nachfolgende Bild zeigt die Leiterschleife zu einem Zeitpunkt t, in dem sie um die Strecke

$$h = \frac{g}{2}t^2 \tag{1}$$

in das Magnetfeld eingetaucht ist. Bis sich die Schleife vollständig im Magnetfeld befindet, vergeht die Zeit T:

$$2R = \frac{g}{2}T^2 \qquad \Longrightarrow \qquad T = 2\sqrt{\frac{R}{g}}. \tag{2}$$



Für die Berechnung der induzierten Spannung $U(t)$ ist die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses $\dot{\Phi}_\mathrm{m}$ maßgeblich, und für diesen der vom Feld durchsetzte Teil $A(t)$ der Innenfläche der Leiterschleife (im Bild grün dargestellt). Unser Ziel ist es, zunächst $\dot{A}(t)$ zu berechnen.

Wir führen den Winkel α ein (s. Bild oben). In der Ausgangsposition für $t = 0$ ist $\alpha = 0$, bei $t = T$ bzw. $\alpha = \pi$ wird die Schleife gerade vollständig vom Feld durchsetzt. Es ist klar, dass eine Induktionsspannung nur für $0 < \alpha \leq \pi$ auftritt, weil sich nur dann der magnetische Fluss ändert. Die Fläche A ist gleich der Differenz aus der Kreissektorenfläche $R^2\alpha$ und der Dreiecksfläche $R^2 \sin\alpha\cos\alpha$:

$$A(\alpha) = R^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) = R^2\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right). \tag{3}$$

Gleichung (3) nach α differenziert, ergibt

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha} = R^2(1 - \cos 2\alpha) = R^2[1 - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)] = 2R^2\sin^2\alpha. \tag{4}$$

Der Zusammenhang zwischen der momentanen Eintauchtiefe h, dem Winkel α und der Zeit t wird über (1) und

$$\cos\alpha = \frac{R-h}{R} = 1 - \frac{g}{2R}t^2 \tag{5}$$

hergestellt. Gleichung (5) nach α differenziert, ergibt mit der Kettenregel

$$-\sin\alpha\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{gt}{R} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{gt}{R\sin\alpha}. \tag{6}$$

Nun haben wir alles zusammen, um $\dot{A}$ anzuschreiben. Mit (4) und (6) erhalten wir:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = 2R^2\sin^2\alpha\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = 2Rgt\sin\alpha. \tag{7}$$

Nach diesen rein geometrischen Überlegungen kommt jetzt die Physik mit dem FARADAYschen Induktionsgesetz ins Spiel:

$$\Phi_{\mathrm{m}}(t) = \int \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \cdot \int \mathrm{d}\boldsymbol{A} = B \cdot A(t) \tag{8}$$

$$\Longrightarrow \quad U(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = -B\,\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -2BRgt\sin\alpha. \tag{9}$$

Gleichung (9) enthält noch den Parameterwinkel α. Wir können ihn mittels (5) eliminieren:

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha &= \left(1 - \frac{g}{2R}t^2\right)^2 = 1 - \frac{g}{R}t^2 + \frac{g^2}{4R^2}t^4 \\ \Longrightarrow \quad \sin^2\alpha &= 1 - \cos^2\alpha = \frac{g}{R}t^2 - \frac{g^2}{4R^2}t^4 = \frac{gt^2}{R}\left(1 - \frac{gt^2}{4R}\right) \\ \Longrightarrow \quad \sin\alpha &= \sqrt{\frac{gt^2}{R}\left(1 - \frac{gt^2}{4R}\right)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Gleichung (10) in (9) eingesetzt, ergibt schließlich

$$U(t) = \boldsymbol{-2BRgt\sqrt{\frac{gt^2}{R}\left(1 - \frac{gt^2}{4R}\right)}} = \boldsymbol{-4BRgt\sqrt{\frac{t^2}{T^2}\left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right)}}. \tag{11}$$

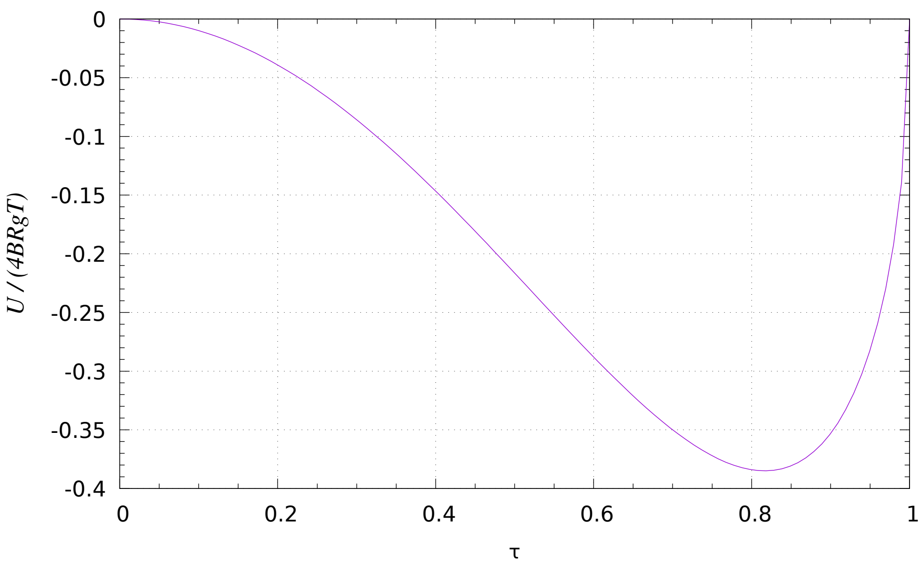
Es ist zu erkennen, dass sowohl zu Beginn des freien Falls für $t = 0$ und als auch für $t = T$ die Induktionsspannung null ist. Mit

$$\tau = \frac{t}{T} \tag{12}$$

als dimensionsloser Zeit lässt sich das Ergebnis auch in der Form

$$U(\tau) = \boldsymbol{-4BRgT\tau\sqrt{\tau^2(1-\tau^2)}} = \boldsymbol{-4BRgT\tau^2\sqrt{1-\tau^2}} \tag{13}$$

schreiben. Das folgende Diagramm zeigt den Zeitverlauf der Induktionsspannung:



b) Um das Maximum von $|U(t)|$ zu bestimmen, differenzieren wir (13) nach τ und setzen die Ableitung gleich null:

$$\frac{\mathrm{d}|U(t)|}{\mathrm{d}\tau} = 4BRgT\left(2\tau\sqrt{1-\tau^2} - \frac{\tau^3}{\sqrt{1-\tau^2}}\right) \stackrel{!}{=} 0 \tag{14}$$

$$\Longrightarrow \quad \tau' = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}8165. \tag{15}$$

Damit wird

$$|U|_{\max} = 4BRgT\,\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \approx \mathbf{1{,}54}\,\boldsymbol{BRgT} = \mathbf{3{,}08}\,\boldsymbol{B\sqrt{gR^3}} \approx \mathbf{34{,}1\ mV}. \tag{16}$$

Alternative Berechnung des Maximums:

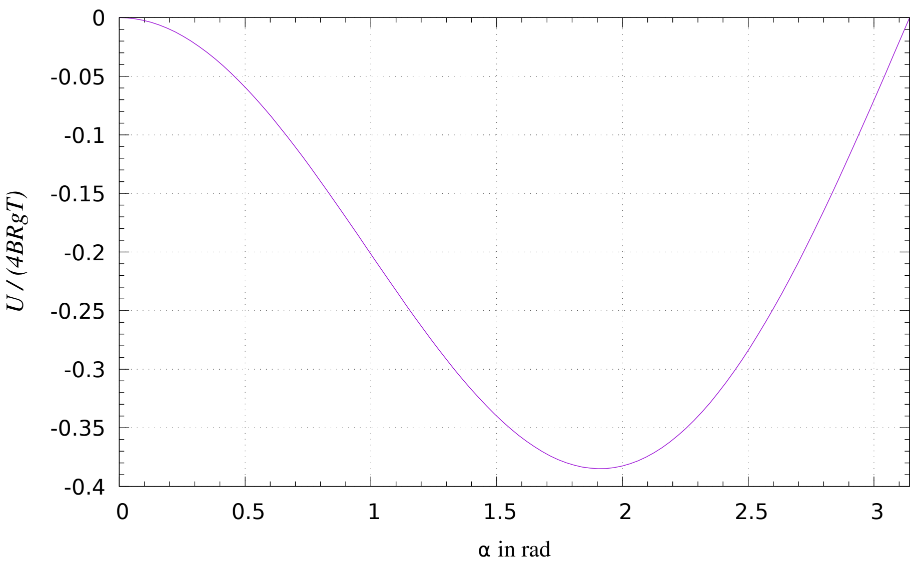
Wir müssen in (9) nicht den Winkel α eliminieren, sondern können dort auch die Zeit t ersetzen. Dazu stellen wir (5) nach t um und verwenden (2) und (12):

$$t^2 = \frac{2R}{g}(1-\cos\alpha) = \frac{4R}{g}\sin^2\frac{\alpha}{2} = T^2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \Longrightarrow \quad t = T\sin\frac{\alpha}{2} \quad \Longrightarrow \quad \tau = \sin\frac{\alpha}{2}. \tag{17}$$

Das ergibt die Funktion

$$U(\alpha) = -2BRgT\sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha, \tag{18}$$

und als Diagramm:



Die Bestimmung des Maximums von $|U(\alpha)|$ liefert hier:

$$\frac{\mathrm{d}|U(\alpha)|}{\mathrm{d}\alpha} = 2BRgT\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\right) \stackrel{!}{=} 0 \tag{19}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha'}{2}\sin\alpha' = -\sin\frac{\alpha'}{2}\cos\alpha'$$

$$\Longrightarrow \quad \cot\frac{\alpha'}{2}\tan\alpha' = -2$$

$$\Longrightarrow \quad \cot\frac{\alpha'}{2}\cdot\frac{2\tan\frac{\alpha'}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha'}{2}} = \frac{2}{1-\tan^2\frac{\alpha'}{2}} = -2$$

$$\Longrightarrow \quad \tan\frac{\alpha'}{2} = \sqrt{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha' \approx 1{,}91 = 109{,}5^\circ. \tag{20}$$

Dieses Ergebnis ist in Übereinstimmung mit (15) und (17). Mit $\sin\frac{\alpha'}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$ und $\sin\alpha' = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ erhalten wir aus (18)

$$|U|_{\max} = 2BRgT\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \boldsymbol{\frac{8}{3\sqrt{3}}\,BRgT}, \tag{21}$$

somit dasselbe Ergebnis wie in (16).

Punktverteilung:

- 0,7 Punkte für das Ergebnis (11) oder (13)
- 0,3 Punkte für das Ergebnis (16) oder (21)