Physik-Marathon 2024

– Aufgabe 14 –

(23. September – 29. September)

Es wird folgender zweistufiger radioaktiver Zerfall des Uranisotops $^{234}_{92}\mathrm{U}$ betrachtet:

$$\begin{aligned} ^{234}_{92}\mathrm{U} \rightarrow\ & ^{230}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \\ & \hookrightarrow {}^{226}_{88}\mathrm{Ra} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}. \end{aligned}$$

Im ersten Schritt zerfällt dabei ein Uran-234-Kern in einen Thorium-230-Kern und ein Alphateilchen. Im zweiten Schritt zerfällt der Thorium-230-Kern in einen Radium-226-Kern und ein weiteres Alphateilchen. Zu Beginn sind keine Thorium-Kerne vorhanden.

Die Halbwertszeit von Uran-234 beträgt $T_1 = 245\,500\,\mathrm{a}$ und die Halbwertszeit von Thorium-230 ist $T_2 = 75\,400\,\mathrm{a}$.

Nach wie vielen Jahren ist die Anzahl der Thorium-Kerne maximal?

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung von Aufgabe 14:

Wir berechnen zuerst die Zerfallskonstanten:

$$\lambda_1 = \frac{\ln 2}{T_1} = 2.8234 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{a}^{-1}, \qquad \lambda_2 = \frac{\ln 2}{T_2} = 9.1929 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{a}^{-1}. \tag{1}$$

Die Ratengleichungen für die zeitliche Änderung der Anzahl der U-Kerne (N_1), Th-Kerne (N_2) und Ra-Kerne (N_3) lauten†

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -\lambda_1 N_1, \qquad \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1 \qquad \frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t} = \lambda_2 N_2. \tag{2a,b,c}$$

Die rechte Seite von (2b) setzt sich dabei zusammen aus der Bildungsrate („*Geburtsrate*“) $\lambda_1 N_1$ der Th-Kerne, die betragsmäßig gleich der Zerfallsrate $-\lambda_1 N_1$ der U-Kerne ist, und der Zerfallsrate („*Todesrate*“) $-\lambda_2 N_2$ der Th-Kerne. Mit der Lösung von (2a),

$$N_1(t) = N_{10}\,\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}, \tag{3}$$

wobei N_{10} die Gesamtzahl der anfänglich vorhandenen Urankerne ist, geht (2b) über in die Differenzialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} + \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_{10}\,\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}, \tag{4}$$

deren homogene Gleichung die Lösung $\tilde{N}_2 = C_1\,\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$ hat. Eine partikuläre Lösung erhalten wir mit dem Ansatz $\hat{N}_2 = C_2\,\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}$:

$$-\lambda_1 C_2\,\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2\,\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} = \lambda_1 N_{10}\,\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}, \qquad C_2 = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}. \tag{5}$$

Die allgemeine Lösung von (4) lautet daher

$$N_2 = \tilde{N}_2 + \hat{N}_2 = C_1\,\mathrm{e}^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}\,\mathrm{e}^{-\lambda_1 t}. \tag{6}$$

Aus der Anfangsbedingung $N_2(t=0) = 0$ finden wir $C_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10}$, sodass

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_1 t} - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\right). \tag{7}$$

Nun muss nur noch die erste Ableitung von (7) Null gesetzt werden:

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(-\lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 T} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 T}\right) = 0 \tag{8}$$

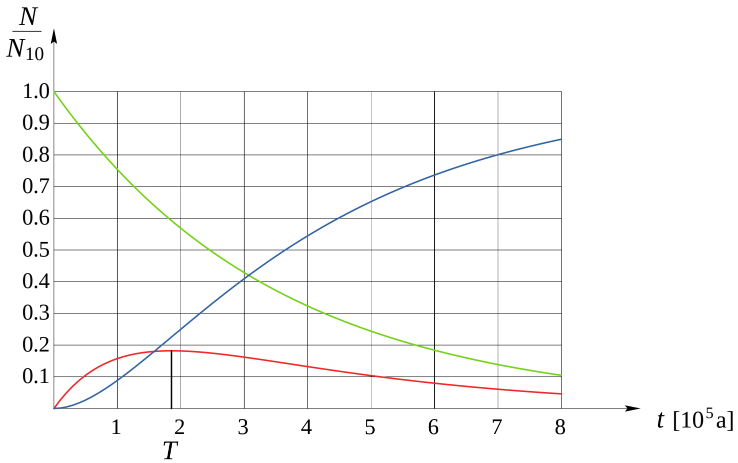
$$\Longrightarrow \quad T = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \mathbf{185\,000\ a}. \tag{9}$$

Korrekterweise muss noch überprüft werden, ob die zweite Ableitung von (7) tatsächlich kleiner als Null ist, wenn $N_2(t)$ ein Maximum annehmen soll. Aus (7) bzw. (8) folgt:

$$\frac{\mathrm{d}^2 N_2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_1^2 \mathrm{e}^{-\lambda_1 T} - \lambda_2^2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 T}\right) = -4.72 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{a}^{-2} \cdot N_{10} < 0.\ \checkmark \tag{10}$$

† Die Anzahl der Kerne ist eine diskrete Variable und lässt sich nicht differenzieren. Aber der Erwartungswert für die Zufallsgröße „Anzahl“ ist eine differenzierbare Funktion der Zeit.

Schließlich sind alle drei Kurven $N_1(t)$ (Uran, Gleichung (3), grün), $N_2(t)$ (Thorium, Gleichung (7), rot) und $N_3(t)$ (Radium, siehe Nachtrag unten, blau) in folgendem Diagramm dargestellt:



Es ist zu erkennen, dass zu jeder Zeit t Teilchenzahlerhaltung der schweren Kerne gemäß

$$N_1(t) + N_2(t) + N_3(t) = N_{10}$$

gilt.

Nachtrag: Der Vollständigkeit halber wird noch $N_3(t)$ angeschrieben:

$$N_3(t) = N_{10}\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\mathrm{e}^{-\lambda_1 T} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\mathrm{e}^{-\lambda_2 T}\right).$$

Punktverteilung:

- 0,5 Punkte für das Aufstellen der drei DGLen (2)
- 0,2 Punkte für die allgemeine Lösung N_2 (6)
- 0,1 Punkte für die spezielle Lösung $N_2(t)$ (7)
- 0,1 Punkte für die Umrechnung Zerfallskonstanten in Halbwertszeiten bzw. umgekehrt
- 0,1 Punkte für das richtige Ergebnis (9)