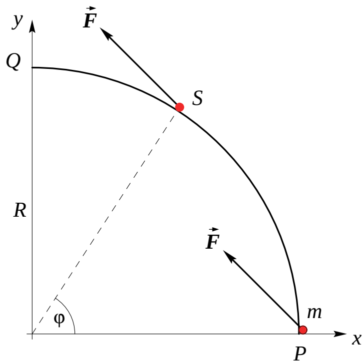
Physik-Marathon 2024

– Aufgabe 13 –

(16. September – 22. September)

Eine Schiene hat die Form eines Viertelkreisbogens mit dem Radius $R = 5$ m und verläuft in einer vertikalen Ebene. Am Fuß der Schiene im Punkt P befindet sich eine Punktmasse $m = 1$ kg. Sie soll mit einer konstanten Kraft $F = 20$ N auf der Schiene bis zum Scheitelpunkt Q hinaufgezogen werden. Dabei verläuft die Kraft stets parallel zur Geraden PQ (siehe folgendes Bild).



Zu Beginn befindet sich die Punktmasse in Ruhe. Reibungs- und andere Kräfte bleiben unberücksichtigt.

a) Welche kinetische Energie hat die Punktmasse m, wenn sie den Scheitelpunkt Q erreicht?

b) In welchem Punkt S auf der Schiene erfährt die Punktmasse ihre größte Beschleunigung in tangentialer Richtung? Gib den zugehörigen Winkel φ an!

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung von Aufgabe 13:

Die Aufgabenstellung hatte eine z. T. folgenreiche Schwäche: Die Passage *„... und andere Kräfte bleiben unberücksichtigt"* führte dazu, dass einige Teilnehmer:innen die Gewichtskraft außer acht ließen, was so nicht vorgesehen war. Wir entschuldigen uns ausdrücklich dafür! Zur Bewertung siehe die Bemerkung ganz unten.

a) Wir betrachten den Vorgang unter Anwendung des Energiesatzes

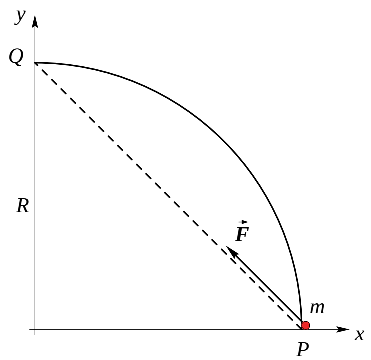
$$W = \Delta E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = mgR + \frac{m}{2}v^2, \tag{1}$$

wobei W die aufzuwendende Arbeit ist, um die Punktmasse von P nach Q zu befördern, $\Delta E_{\text{pot}} = mgR$ den Zuwachs an potenzieller Energie darstellt und $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2$ die kinetische Energie im Punkt Q ist.

Da sowohl die Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_{\text{G}}$ als auch die Zugkraft $\boldsymbol{F}$ konservative Kräfte sind, ist bei der Berechnung der aufzuwendenden Arbeit

$$W = \int_P^Q \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{2}$$

als Linienintegral 2. Art der konkrete Integrationsweg völlig beliebig. Der Wert des Integrals hängt allein vom Anfangs- und Endpunkt des Weges, also P bzw. Q, ab. Deshalb kann der Viertelkreisbogen durch den *kürzesten* Weg von P nach Q (im nachfolgenden Bild gestrichelt gezeichnet) ersetzt werden.



Dies hat den Vorteil, dass in (1) nun $\boldsymbol{F}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ überall parallel verlaufen (also $\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = F\,\mathrm{d}r$ gilt) und somit unmittelbar

$$W = \int_P^Q F\,\mathrm{d}r = F\int_P^Q \mathrm{d}r = F(\sqrt{2}R) = \sqrt{2}FR \tag{3}$$

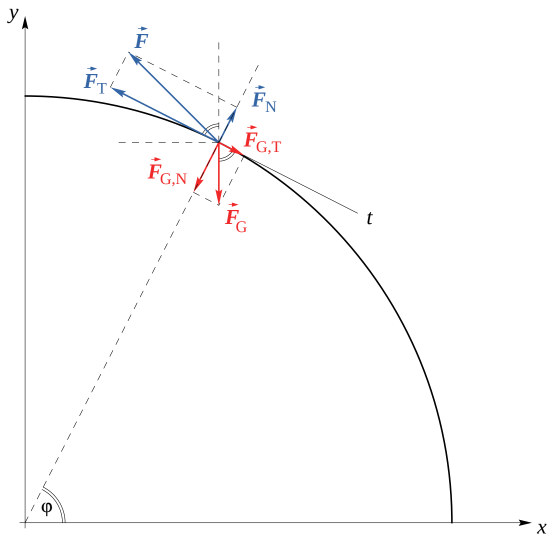
(mit $|PQ| = \sqrt{2}\,R$) folgt. Damit erhalten wir:

$$E_{\text{kin}} = W - \Delta E_{\text{pot}} = \boldsymbol{\sqrt{2}FR - mgR} \tag{4}$$

$$= \mathbf{141{,}42\ J - 49{,}05\ J = 92{,}37\ J}. \tag{5}$$

Damit die kinetische Energie positiv ist, muss offenbar $F > \frac{mg}{\sqrt{2}}$ gelten, das ist hier der Fall. Zur Berechnung des Integrals (2) entlang des tatsächlichen kreisbogenförmigen Schienenweges siehe unten.

b) Die Punktmasse erfährt dann ihre maximale tangentiale Beschleunigung, wenn die resultierende tangentiale Kraft am größten wird. Für die Ermittlung der resultierenden Tangentialkraft schauen wir uns die Projektionen beider Kräfte, der Zugkraft $\boldsymbol{F}$ und der Gewichtskraft $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$, in Richtung der Tangente an die Bahnkurve an. Im folgenden Bild ist t die Tangente im momentanen Punkt auf der Bahn. $\boldsymbol{F}$ wird zerlegt in die Tangentialkomponente $\boldsymbol{F}_\mathrm{T}$ und die Normalkomponente $\boldsymbol{F}_\mathrm{N}$, und $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ wird zerlegt in die Tangentialkomponente $\boldsymbol{F}_\mathrm{G,T}$ und die Normalkomponente $\boldsymbol{F}_\mathrm{G,N}$.



Rechnerisch ergeben sich folgende Gleichungen:

$$F_\mathrm{T} = F\cos(\varphi - 45^\circ) \tag{6}$$
$$F_\mathrm{N} = F\sin(\varphi - 45^\circ) \tag{7}$$
$$F_\mathrm{G,T} = F_\mathrm{G}\cos\varphi = mg\cos\varphi \tag{8}$$
$$F_\mathrm{G,N} = F_\mathrm{G}\sin\varphi = mg\sin\varphi \tag{9}$$

Der Betrag der resultierenden Tangentialkraft $F_\mathrm{T,res}$ ist somit nach (6) und (8)

$$F_\mathrm{T,res} = F_\mathrm{T} - F_\mathrm{G,T} = F\cos(\varphi - 45^\circ) - mg\cos\varphi. \tag{10}$$

Wenn diese maximal werden soll, muss die erste Ableitung Null sein:

$$\frac{\mathrm{d}F_\mathrm{T,res}}{\mathrm{d}\varphi} = -F\sin(\varphi - 45^\circ) + mg\sin\varphi = 0 \tag{11}$$
$$\Longrightarrow \quad F(\sin\varphi\cos 45^\circ - \cos\varphi\sin 45^\circ) = mg\sin\varphi \tag{12}$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{F}{\sqrt{2}}(\sin\varphi - \cos\varphi) = mg\sin\varphi \tag{13}$$
$$\Longrightarrow \quad \sin\varphi - \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}\,mg}{F}\sin\varphi \tag{14}$$
$$\Longrightarrow \quad 1 - \cot\varphi = \frac{\sqrt{2}\,mg}{F} \tag{15}$$
$$\Longrightarrow \quad \varphi = \operatorname{arccot}\left(1 - \frac{\sqrt{2}\,mg}{F}\right) = \mathbf{72{,}97^\circ}. \tag{16}$$

Aus (10) ergibt sich daraus ein Zahlenwert von $F_\mathrm{T,res} = 14{,}79\ \mathrm{N}$.

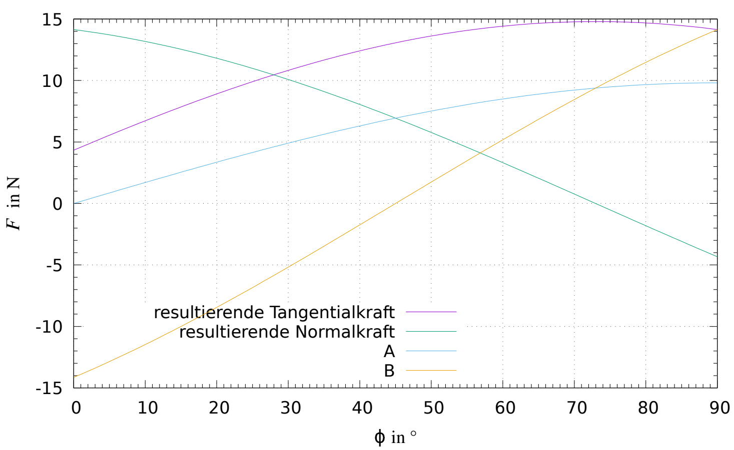
Um zu überprüfen, ob tatsächlich ein Maximum bei diesem Winkel vorliegt, wird das Vorzeichen der zweiten Ableitung ermittelt. Nach (11) und (10) gilt

$$\frac{\mathrm{d}^2 F_{\mathrm{T,res}}}{\mathrm{d}\varphi^2} = -F\cos(\varphi - 45^\circ) + mg\cos\varphi = -F_{\mathrm{T,res}} < 0. \;\checkmark \tag{17}$$

Streng genommen muss noch überprüft werden, ob während des gesamten Vorgangs die Punktmasse auf der Schiene bleibt und nicht etwa durch $\boldsymbol{F}$ angehoben wird. Dazu wird die resultierende Normalkraft auf die Schiene $F_{\mathrm{N,res}}$ als Differenz der Normalkräfte (9) und (7) betrachtet:

$$F_{\mathrm{N,res}} = F_{\mathrm{G,N}} - F_{\mathrm{N}} = mg\sin\varphi - F\sin(\varphi - 45^\circ). \tag{18}$$

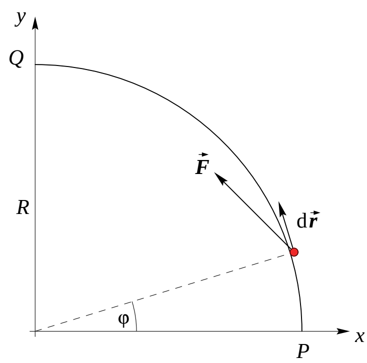
Beide resultierenden Kräfte (10) und (18) sind als Funktionen des Winkels φ im folgenden Diagramm geplottet:



Das oben berechnete Maximum der resultierenden Tangentialkraft ist bei $\varphi \approx 73^\circ$ gut zu erkennen, während die resultierende Normalkraft im gesamten Bereich positiv ist, d. h., die Punktmasse verliert nirgends den Kontakt zur Schiene.

Alternative Berechnung des Wegintegrals (2):

Wir benutzen zur Integration (ebene) Polarkoordinaten (r, φ). Da die Bewegung entlang eines Viertelkreisbogens stattfindet, gilt überall $r = R$, und es verbleibt als einzige Koordinate der Winkel φ (siehe folgendes Bild):



Aus dem Ortsvektor $\boldsymbol{r} = R(\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\varphi\,\boldsymbol{j})$ folgt durch Differenziation

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = R\,\mathrm{d}\varphi(-\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}). \tag{19}$$

Für den Kraftvektor können wir

$$\boldsymbol{F} = F(-\sin\frac{\pi}{4}\,\boldsymbol{i} + \cos\frac{\pi}{4}\,\boldsymbol{j}) \tag{20}$$

anschreiben, sodass für das Skalarprodukt

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = FR\left(\sin\varphi\sin\frac{\pi}{4} + \cos\varphi\cos\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\varphi = FR\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\varphi \tag{21}$$

folgt. Nun ergibt die Integration mit (21)

$$W = \int\limits_P^Q \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = FR\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\varphi = FR\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2FR\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}FR, \tag{22}$$

in Übereinstimmung mit (3).

Bemerkung:

Es gab Unklarheiten darüber, ob die Gewichtskraft auf die Punktmasse berücksichtigt werden muss oder nicht, zumal der Satz *„Reibungs- und andere Kräfte bleiben unberücksichtigt“* sie auszuschließen schien. Mit „andere Kräfte“ (die erst nach den Reibungskräften erwähnt wurden und solche irrelevanten Kräfte wie beispielsweise Auftriebs- oder elektromagnetische Kräfte ausschließen sollten) war die Gewichtskraft aber nicht gemeint. Für die Aufgabensteller war klar, dass die Passagen im Text über dem Bild wie „vertikale Ebene“, „Scheitelpunkt“ und „hinaufgezogen“ eindeutig darauf hindeuten, dass sich die Anordnung sehr wohl im Erdschwerefeld befindet. Ansonsten hätten wir den Vorgang von vornherein in eine horizontale Ebene gelegt. Dennoch müssen wir uns entschuldigen, diesen Umstand nicht zweifelsfrei im Aufgabentext geklärt zu haben.

Daraus ergibt sich eine schwierige gerechte Bewertung der eingereichten Lösungen. Einige Teilnehmer:innen haben bemerkt, dass die Gewichtskraft mit einbezogen werden muss; diese bekamen den ganzen Punkt. Es gab auch Einsendungen, die beide Fälle (mit und ohne Gewichtskraft) behandelten; sie bekamen ebenfalls den ganzen Punkt. Andere kamen in a) mit der Gewichtskraft auf das richtige Ergebnis, haben aber in b) diese ganz außer acht gelassen; sie bekamen 0,75 Punkte (s. unten). Wir haben in der Bewertung versucht, die „Verluste“ insgesamt zu minimieren. Die genaue Punktverteilung ergibt sich wie folgt:

Punktverteilung:

- 0,5 Punkte für die richtige kinetische Energie von 92,37 J in a)
- 0,4 Punkte für eine kinetische Energie von 141,42 J in a)
- 0,5 Punkte für den richtigen Winkel von 72,97 ° in b)
- 0,25 Punkte für einen Winkel von 45 ° in b)
- 0,05 Punkte Abzug, wenn in b) bei Behandlung als Extremwertaufgabe nicht anhand der 2. Ableitung überprüft wurde, ob tatsächlich ein Maximum vorliegt (17)
- 0,75 Punkte insgesamt, wenn in a) richtig *mit* der Gewichtskraft gerechnet wurde, diese aber in b) komplett außer acht gelassen wurde