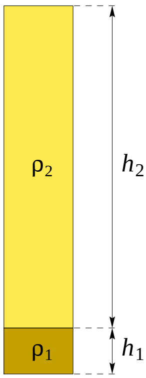
Physik-Marathon 2024

– Aufgabe 12 –

(9. September – 15. September)

Ein Kreiszylinder der Höhe $h = h_1 + h_2$ besteht bis zur Höhe h_1 aus einem Material der Dichte ϱ_1. Der obere Teil ist aus einem Material der Dichte ϱ_2 gefertigt (siehe folgendes Bild in der Seitenansicht).



Dieser Körper (nachfolgend *Pose* genannt) wird, mit dem unteren Teil voran, vorsichtig aufrecht in Wasser eingetaucht und dann losgelassen.

Die Anordnung hat folgende Parameter: Höhe $h_1 = 2$ cm, Höhe $h_2 = 7h_1$, Dichte des Wassers $\varrho_W = 1{,}0\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, Dichte $\varrho_1 = 2{,}8\,\varrho_W$ und Dichte $\varrho_2 = \frac{1}{8}\varrho_1$.

a) Weise nach, dass die Pose im Wasser schwimmt! Wie tief taucht die ruhende Pose in das Wasser ein?

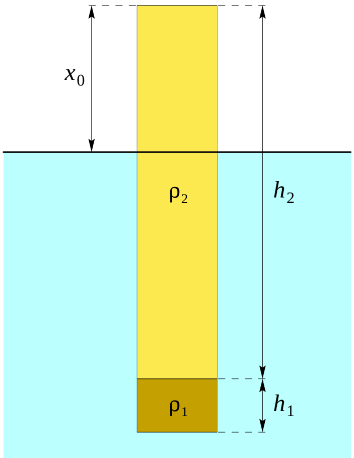
b) Ist die aufrecht schwimmende Position stabil oder kippt die Pose um, wenn sie am oberen Ende leicht in horizontaler Richtung angestupst wird?

c) Die Pose wird von oben, ohne Schiefstellung, leicht heruntergedrückt. Mit welcher Frequenz schwingt sie anschließend? Der Einfluss der Reibung wird vernachlässigt.

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung von Aufgabe 12:

Das folgende, maßstäbliche Bild zeigt die Pose in eingetauchter, aufrechter Position für den Fall, dass ein Schwimmgleichgewicht existiert. Zusätzlich zu den vorgegebenen Maßen wird die Höhe x_0 eingeführt, mit der die Pose aus dem Wasser ragt. Die Querschnittsfläche des Zylinders sei A.



Obwohl aus der Aufgabenstellung konkrete Zahlenwerte für die Verhältnisse $\frac{h_2}{h_1}$, $\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$ und $\frac{\varrho_1}{\varrho_W}$ bekannt sind, rechnet die nachfolgende Lösung mit den allgemeinen Parametern[†]

$$\varepsilon := \frac{h_2}{h_1}, \qquad \lambda := \frac{\varrho_2}{\varrho_1}, \qquad \mu := \frac{\varrho_1}{\varrho_W}. \tag{1}$$

Die resultierenden Gleichungen können später sofort auf die vorliegende Aufgabe zugeschnitten werden, wenn die Parameterwerte

$$\varepsilon = 7, \qquad \lambda = \frac{1}{8}, \qquad \mu = 2{,}8 \tag{2}$$

eingesetzt werden (vgl. Aufgabenstellung).

a) Die Pose schwimmt, wenn ihre mittlere Dichte ϱ_P (= Gesamtmasse/Gesamtvolumen) kleiner als die Dichte des Wassers ϱ_W ist. Die Gesamtmasse ist $m = (\varrho_1 h_1 + \varrho_2 h_2)A$ und das Gesamtvolumen $V = (h_1 + h_2)A$, sodass

$$\varrho_P = \frac{m}{V} = \frac{(\varrho_1 h_1 + \varrho_2 h_2)A}{(h_1 + h_2)A} = \varrho_1 \frac{1 + \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\frac{h_2}{h_1}}{1 + \frac{h_2}{h_1}} = \varrho_1 \frac{1 + \lambda\varepsilon}{1 + \varepsilon} = \varrho_W \frac{\mu(1 + \lambda\varepsilon)}{1 + \varepsilon}. \tag{3}$$

gilt. Mit den speziellen Werten (2) folgt

$$\varrho_P = \frac{21}{32}\varrho_W = 0{,}65625\,\varrho_W < \varrho_W \tag{4}$$

Die Pose **schwimmt** also im Wasser in aufrechter Position.

Im Gleichgewichtsfall der schwimmenden Pose muss die Gewichtskraft F_G der Pose betragsmäßig gleich der Auftriebskraft F_A, also der Gewichtskraft des verdrängten Wassers, sein. Mit g als Fallbeschleunigung ist

$$F_G = mg = (\varrho_1 h_1 + \varrho_2 h_2)Ag = \varrho_1 h_1 (1 + \lambda\varepsilon)Ag = \varrho_W h_1\, \mu(1 + \lambda\varepsilon)Ag \tag{5}$$

[†] Dies hat den Vorteil, dass ein unterschiedliches Verhalten der Anordnung mit einer Parametersuche einfach modelliert werden kann. Zur Lösung der vorliegenden Aufgabe ist das jedoch nicht notwendig.

und

$$F_{\mathrm{A}} = \varrho_{\mathrm{W}}(h_1 + h_2 - x_0)Ag = \varrho_{\mathrm{W}} h_1 \left(1 + \varepsilon - \frac{x_0}{h_1}\right) Ag. \tag{6}$$

Gleichsetzen von (5) und (6) führt auf

$$\mu(1 + \lambda\varepsilon) = 1 + \varepsilon - \frac{x_0}{h_1} \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 = h_1(1 + \varepsilon - \mu(1 + \lambda\varepsilon)) \tag{7}$$

Mit den gegebenen Werten (2) folgt

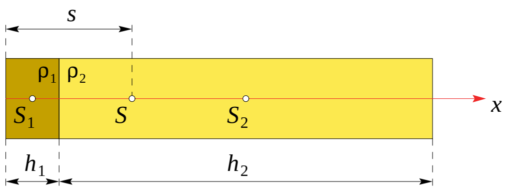
$$x_0 = 5{,}5 \text{ cm} \tag{8}$$

Die ruhende Pose taucht somit

$$h_1 + h_2 - x_0 = \mathbf{10{,}5\ cm} \tag{9}$$

ins Wasser ein.

b) Zur Beurteilung der Schwimmstabilität ist es wichtig, die Angriffspunkte beider Kräfte, Gewichtskraft F_{G} und Auftriebskraft F_{A}, zu kennen. Wir berechnen zuerst die Lage des Schwerpunktes S als Angriffspunkt von F_{G}. Dazu legen wir die Pose auf die Seite (siehe folgendes Bild):

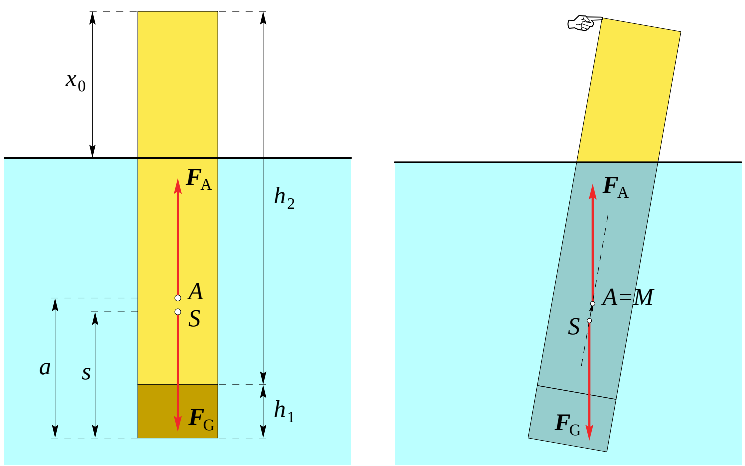


Dann haben die Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Zylinder, aus denen die Pose zusammengesetzt ist, folgende x-Koordinaten: $x_1 = \frac{1}{2}h_1$ und $x_2 = h_1 + \frac{1}{2}h_2$. Den gesuchten Abstand s des Schwerpunktes vom linken (bzw. unteren) Ende der Pose berechnen wir mittels

$$s = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\varrho_1 h_1 \cdot \frac{h_1}{2} + \varrho_2 h_2 \cdot (h_1 + \frac{h_2}{2})}{\varrho_1 h_1 + \varrho_2 h_2} = \frac{\varrho_1 h_1 \cdot \frac{1}{2} + \varrho_2 h_2 \cdot (1 + \frac{h_2}{2h_1})}{\varrho_1 + \varrho_2 \frac{h_2}{h_1}} \tag{10}$$

$$= h_1 \frac{\frac{1}{2} + \lambda\varepsilon\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{1 + \lambda\varepsilon} = 4{,}73 \text{ cm}. \tag{11}$$

Der Angriffspunkt A der Auftriebskraft ist der Schwerpunkt des verdrängten Wasservolumens (s. folgendes Bild links) und damit der geometrische Mittelpunkt des eingetauchten Teils der Pose.



Der Abstand a von der Unterkante berechnet sich mit (7) einfach durch

$$a = \frac{1}{2}(h_1 + h_2 - x_0) = \frac{1}{2}h_1\,\mu(1 + \lambda\varepsilon) = 5{,}25\,\text{cm}. \tag{12}$$

Da nun Punkt A *oberhalb* des Schwerpunktes S liegt, entsteht bei einer kleinen seitlichen Auslenkung ein Drehmoment, das die Pose in die senkrechte Position zurückdreht (s. obiges Bild rechts). Dafür muss nur die Richtung des Drehmoments $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_A = \overrightarrow{SA} \times \boldsymbol{F}_A$ ermittelt werden: $\boldsymbol{F}_A$ liegt links vom Strahl $\overrightarrow{SA}$, somit wird ein *links*drehendes Moment erzeugt, welches die Pose wieder in die Gleichgewichtslage zurückbefördert. Die Schwimmlage ist daher **stabil**.

c) Drücken wir die Pose aus der Ruhelage um einen Betrag Δx nach unten, so vergrößert sich die Auftriebskraft, die nach oben gerichtet ist (daher das Minuszeichen), um

$$\Delta F_A = -\Delta m_{\mathrm{Fl}}\, g = -\varrho_{\mathrm{W}} A g\, \Delta x = -k\, \Delta x \tag{13}$$

mit der „Federkonstante“ $k = \varrho_{\mathrm{W}} A g$. Die Proportionalität $\Delta F_A \sim -\Delta x$ in Gleichung (13) ist äquivalent zu der bekannten Gleichung, die die Schwingung einer Masse an einer Feder beschreibt. Wir können daher direkt die Kreisfrequenz der entstehenden harmonischen Schwingung ablesen:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{14}$$

Die Gesamtmasse ist

$$m = m_1 + m_2 = \varrho_1 h_1 A + \varrho_2 h_2 A = \varrho_1 h_1 A(1 + \lambda\varepsilon), \tag{15}$$

sodass aus (14)

$$\omega = \sqrt{\frac{\varrho_{\mathrm{W}} A g}{\varrho_1 h_1 A(1 + \lambda\varepsilon)}} = \sqrt{\frac{g}{\mu h_1(1 + \lambda\varepsilon)}} = \sqrt{\frac{g}{h_1}}\,\frac{1}{\sqrt{\mu(1 + \lambda\varepsilon)}} \tag{16}$$

bzw.

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h_1}}\,\frac{1}{\sqrt{\mu(1 + \lambda\varepsilon)}} = \mathbf{1{,}54\ s^{-1}} \tag{17}$$

folgt.

Bemerkung 1:

Die mittlere Dichte ϱ_{P} der Pose muss in a) nicht explizit ausgerechnet werden, um zu beurteilen, ob die Pose schwimmt, gerade schwebt oder sinkt. Es genügt, mit (7) bzw. (8) gleich die Eintauchtiefe bzw. die hinausragende Höhe x_0 der Pose zu berechnen. Käme dabei ein negativer Wert für x_0 heraus, schwimmt die Pose nicht, sondern sinkt im Wasser.

Die Gleichungen (3) und (7) beschreiben den Fall, dass die Pose gerade schwebt, gleichermaßen: Aus (3) lesen wir aus der Bedingung $\varrho_{\mathrm{P}} = \varrho_{\mathrm{W}}$

$$\mu(1 + \lambda\varepsilon) = 1 + \varepsilon \tag{18}$$

ab, während aus (7) für $x_0 = 0$ ebenfalls (18) folgt.

Bemerkung 2:

Die Beurteilung der Schwimmstabilität kann alternativ auch mithilfe des *Metazentrums* M erfolgen (s. obiges rechtes Bild). Es ist definiert als Schnittpunkt der Trägergeraden des Auftriebsvektors mit der Mittellinie des eingetauchten Körpers (oben gestrichelt eingezeichnet). In unserem Fall ist $A = M$. Das Kriterium besagt, dass, wenn das Metazentrum *oberhalb* des Schwerpunktes S des Körpers liegt, die Schwimmlage *stabil* ist, anderenfalls nicht.

Punktverteilung:

- 0,2 Punkte für die Begründung in a), dass die Pose schwimmt
- 0,2 Punkte für das Ergebnis (9) in a)
- 0,15 Punkte für die Berechnung des Schwerpunktes in b)
- 0,15 Punkte für die Begründung in b), dass ein stabiles Gleichgewicht vorliegt
- 0,3 Punkte für das Ergebnis (17) in c)
- 0,1 Punkte Abzug, wenn die Zahlenwerte von f und T vertauscht wurden