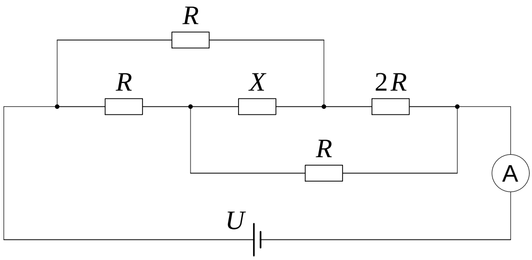
Physik-Marathon 2024

– Aufgabe 11 –

(24. Juni – 8. September)

Das nachfolgende Bild zeigt ein Widerstandsnetzwerk, bestehend aus drei identischen Widerständen R, einem Widerstand $2R$ sowie einem unbekannten Widerstand X.



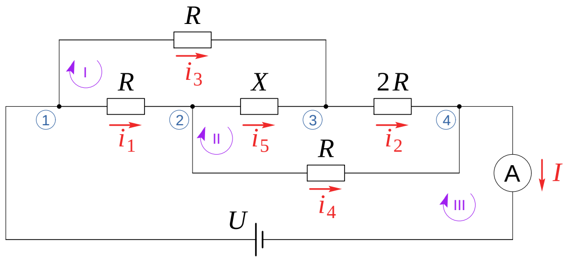
Berechne den Widerstand X, sodass bei einer Spannung von $U = 5\,\mathrm{V}$ das angeschlossene Amperemeter einen Strom von $I = 42{,}0\,\mathrm{mA}$ anzeigt!

Der Widerstand R beträgt hier $100\,\Omega$.

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung von Aufgabe 11:

Wir lösen die Aufgabe mithilfe der KIRCHHOFFschen Gesetze. Dazu führen wir die unbekannten Ströme i_1, i_2, i_3, i_4 und i_5 ein, wie sie im folgenden Bild eingezeichnet sind:



Wir benötigen drei Knoten- und drei Maschengleichungen. Als Knoten wählen wir die im Bild mit ②, ③ und ④ bezeichneten Knoten und als Maschen die mit I, II und III bezeichneten Maschen.

Dann gelten folgende Knoten- und Maschengleichungen:

$$\begin{aligned} i_1 - i_4 - i_5 &= 0 \qquad (②) & (1)\\ i_3 + i_5 - i_2 &= 0 \qquad (③) & (2)\\ i_2 + i_4 - i &= 0 \qquad (④) & (3)\\ Ri_3 - Ri_1 - Xi_5 &= 0 \qquad (\mathrm{I}) & (4)\\ 2Ri_2 - Ri_4 + Xi_5 &= 0 \qquad (\mathrm{II}) & (5)\\ Ri_1 + Ri_4 &= U \qquad (\mathrm{III}). & (6) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Ströme i_k ($k = 1, \ldots, 5$) und I, falls alle Widerstände (einschl. X) gegeben wären. Bei der Auswahl der Knoten- und Maschengleichungen muss darauf geachtet werden, dass alle Gleichungen linear unabhängig sind. Ansonsten hat das Gleichungssystem keine eindeutige Lösung. Dies wäre z. B. der Fall, wenn vier Knotengleichungen oder vier Maschengleichungen in das Gleichungssystem eingeflossen wären.

Im Folgenden wird gezeigt, wie das Gleichungssystem manuell nach dem GAUSSschen Algorithmus gelöst werden kann[†]. Dazu stellen wir die um die rechte Seite $\boldsymbol{b}$ erweiterte Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$ aus (1) bis (6) auf (die Unbekannten in den Spalten von links nach rechts sind dabei i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, I):

$$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b} = \left[\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ -R & 0 & R & 0 & -X & 0 & 0\\ 0 & 2R & 0 & -R & X & 0 & 0\\ R & 0 & 0 & R & 0 & 0 & U \end{array}\right]. \tag{7}$$

Das Ziel ist es nun, aus $\boldsymbol{A}$ eine obere Dreiecksmatrix (also eine Matrix, deren Elemente unterhalb der Diagonalen nur aus Nullen besteht) zu machen. Im ersten Schritt werden die

[†]Normalerweise überlässt man eine solche Aufgabe besser irgendeinem Computeralgebraprogramm wie z. B. Geogebra®, WolframAlpha® oder Maple®, s. die Bemerkung unten)

Koeffizienten a_{41} und a_{61} in (7) durch geschickte Linearkombinationen mit anderen Zeilen zu null gemacht:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & R & -R & -R-X & 0 & 0 \\ 0 & 2R & 0 & -R & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2R & R & 0 & U \end{array}\right]. \tag{8}$$

Die erste Spalte in (8) hat nun fünf Nullen unterhalb des Diagonalelements 1. Der zweite Schritt führt auf:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & R & -R & -R-X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3R & -X & -2R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2R & R & 0 & U \end{array}\right]. \tag{9}$$

In (9) gibt es vier Nullen in der zweiten Spalte unterhalb des Diagonalelements -1. Im dritten Schritt muss nur die vierte Zeile modifiziert werden:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2R & 2R+X & -R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3R & -X & -2R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2R & R & 0 & U \end{array}\right]. \tag{10}$$

Wir haben in der dritten Spalte von (10) drei Nullen unterhalb des Diagonalelements 1. Im vierten Schritt entsteht:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2R & 2R+X & -R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6R+5X & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -R-X & R & U \end{array}\right]. \tag{11}$$

Im letzten Schritt müssen wir wirklich etwas rechnen, es folgt schließlich:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2R & 2R+X & -R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6R+5X & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R(7R+6X) & U(6R+5X) \end{array}\right]. \tag{12}$$

Damit sind wir auch schon fast fertig, denn die letzte Zeile in (12) bedeutet

$$R(7R+6X)I = U(6R+5X) \qquad \Longrightarrow \qquad I = \frac{6R+5X}{7R+6X}\cdot\frac{U}{R}. \tag{13}$$

Nun folgt aus (13) mit $U = 5\,\mathrm{V}$, $I = 42\,\mathrm{mA}$ und $R = 100\,\Omega$ der gesuchte Widerstand X:

$$\frac{6R+5X}{7R+6X} = \frac{RI}{U} = 0{,}84 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{X = 300\,\Omega}. \tag{14}$$

Mit dieser sehr ausführlich aufgeschriebenen Lösung soll nur gezeigt werden, dass die Lösung dieses Gleichungssystems noch mit vertretbarem Aufwand per Hand möglich ist.

Wir müssen hier nicht alle Rücksubstitutionen durchführen, weil es nicht gefordert ist, die Ströme i_k $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ einzeln anzugeben. Der Vollständigkeit halber geben wir sie trotzdem an:

$$i_1 = 24\,\text{mA}, \quad i_2 = 16\,\text{mA}, \quad i_3 = 18\,\text{mA}, \quad i_4 = 26\,\text{mA}, \quad i_5 = -2\,\text{mA}. \tag{15}$$

Bemerkung:

Maple® löst das Gleichungssystem (1) bis (6) mit den vier Befehlen

```
with(LinearAlgebra):
A := Matrix([[1,0,0,-1,-1,0],[0,-1,1,0,1,0],[0,1,0,1,0,-1],[-R,0,R,0,-X,0], \
[0,2R,0,-R,X,0],[R,0,0,R,0,0]]);
b := Vector([0,0,0,0,0,U]);
LinearSolve(A, b);
```

Die Lösung lautet:

$$i_1 = \frac{3R + 3X}{7R + 6X} \cdot \frac{U}{R} \tag{16}$$

$$i_2 = \frac{2R + 2X}{7R + 6X} \cdot \frac{U}{R} \tag{17}$$

$$i_3 = \frac{3R + 2X}{7R + 6X} \cdot \frac{U}{R} \tag{18}$$

$$i_4 = \frac{4R + 3X}{7R + 6X} \cdot \frac{U}{R} \tag{19}$$

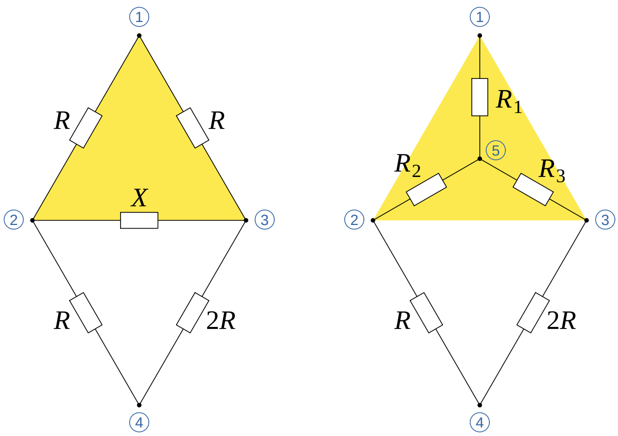
$$i_5 = -\frac{R}{7R + 6X} \cdot \frac{U}{R} \tag{20}$$

$$I = \frac{6R + 5X}{7R + 6X} \cdot \frac{U}{R}. \tag{21}$$

Wir erkennen, dass (21) mit der per Handrechnung gefundenen Lösung (13) übereinstimmt.

Alternative Lösung:

Wenn wir die gegebene Schaltung mit den fünf Widerständen etwas umzeichnen, erkennen wir, dass es sich um eine *Brückenschaltung* handelt, siehe nachfolgendes Bild links.



Der Widerstand X verhindert es hier, dass der Gesamtwiderstand R_{ges} zwischen den Knoten ① oben und ④ unten einfach mit den Gesetzen der Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen berechnet werden kann.

Dabei hilft die sog. *Dreieck-Stern-Transformation*, bei der aus den drei Widerständen R, R, X, die entlang der Kanten eines Dreiecks („Dreieck“) angeordnet sind, durch ein äquivalentes Gebilde aus drei Widerständen R_1, R_2, R_3 ersetzt wird, die vom Mittelpunkt dieses Dreiecks zu den Eckpunkten („Stern“) reichen, siehe obiges Bild rechts. Der Vorteil dieser Transformation ist nun offensichtlich: Es ist zwar ein zusätzlicher Knoten ⑤ hinzugekommen, aber die Anzahl der Maschen hat sich von zwei auf eine verringert. Dadurch lässt sich R_{ges} als Reihenschaltung aus R_1 und der Parallelschaltung von $R_2 + R$ und $R_3 + 2R$ einfach berechnen.

Die Formeln, die die Transformation zwischen beiden Schaltungen bewerkstelligen, sind z. B. in [1] mit Herleitung beschrieben.

Hier gilt

$$R_1 = \frac{R^2}{2R+X}, \qquad R_2 = R_3 = \frac{RX}{2R+X}. \tag{22}$$

Daraus folgt

$$R_2 + R = \frac{RX}{2R+X} + R = \frac{2R+2X}{2R+X}R \tag{23}$$

$$R_3 + 2R = \frac{RX}{2R+X} + 2R = \frac{4R+3X}{2R+X}R \tag{24}$$

$$(R_2+R) \parallel (R_3+2R) = \frac{\frac{2R+2X}{2R+X}\cdot\frac{4R+3X}{2R+X}\cdot R^2}{\left(\frac{2R+2X}{2R+X}+\frac{4R+3X}{2R+X}\right)R} = \frac{(2R+2X)(4R+3X)}{(2R+X)(6R+5X)}R \tag{25}$$

$$R_{\text{ges}} = R_1 + (R_2+R) \parallel (R_3+2R) = \left[\frac{R}{2R+X} + \frac{(2R+2X)(4R+3X)}{(2R+X)(6R+5X)}\right]R \tag{26}$$

$$= \frac{14R^2+19RX+6X^2}{(2R+X)(6R+5X)} = \frac{7R+6X}{6R+5X}R, \tag{27}$$

in Übereinstimmung mit (21).

Literatur

[1] `https://de.wikipedia.org/wiki/Stern-Dreieck-Transformation`

Punktverteilung:

- 1,0 Punkte für das richtige Ergebnis (14)
- 0,0 Punkte für ein falsches Ergebnis, unabhängig davon „wie viel“ an der Lösung richtig ist