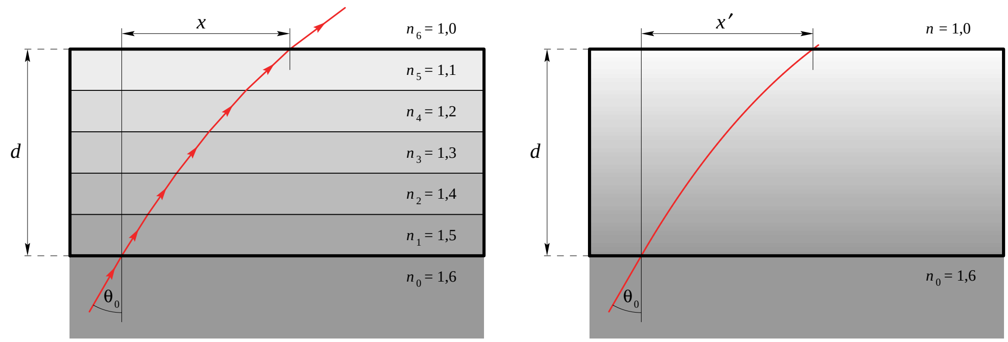
Physik-Marathon 2024

– Aufgabe 10 –

(24. Juni – 8. September)

Ein monochromatischer Lichtstrahl breitet sich in einem Medium mit Brechungsindex $n_0 = 1{,}6$ aus. Er trifft auf einen Block aus transparentem Material der Dicke $d = 80\,\mathrm{mm}$ an dessen Unterseite unter einem Einfallswinkel von $\theta_0 = 30°$. Der Block ist lamellenartig aus fünf Schichten gleicher Dicke so aufgebaut, dass in jeder Schicht der Brechungsindex n konstant ist. Dabei fällt der Brechungsindex von $n_1 = 1{,}5$ in der untersten Schicht linear nach oben hin ab, bis er in der obersten Schicht den Wert $n_5 = 1{,}1$ erreicht. Oberhalb des Blocks befindet sich Luft mit dem Brechungsindex $n_6 = 1{,}0$.

Die folgende Abbildung (links) zeigt den Aufbau:



a) Berechne die horizontale Strecke x, die der Lichtstrahl vom Eintritt in den Block unten bis zum Austritt oben zurücklegt!

b) Nun wird der obige Block mit seinen fünf Lamellen durch einen Block ersetzt, in dem der Brechungsindex *kontinuierlich* (also stetig) von $n_0 = 1{,}6$ an der Unterseite auf $n = 1{,}0$ an der Oberseite linear abfällt (siehe Bild rechts). Alle anderen Parameter sind dieselben wie unter a).

   Berechne die horizontale Strecke x', die der Lichtstrahl vom Eintritt in den Block bis zum Austritt zurücklegt in Millimetern, gerundet auf drei Stellen nach dem Komma!

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung von Aufgabe 10:

a) Die Anzahl der Schichten ist hier $k = 5$. Die Dicke einer Schicht ist damit

$$\Delta d = \frac{d}{k} = 16\,\text{mm}. \tag{1}$$

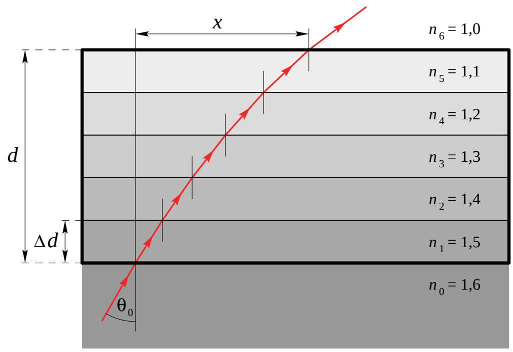
Da der Brechungsindex n linear mit zunehmender Höhe abnimmt, gilt

$$n_i = 1{,}6 - 0{,}1\,i \qquad (i = 0, 1, \dots, k+1), \tag{2}$$

wobei das Medium unterhalb des Blockes mit $n_0 = 1{,}6$ und das Medium oberhalb des Blockes mit $n_6 = 1{,}0$ in (2) enthalten sind. An jedem der diskreten Übergänge von einer Schicht mit dem Brechungsindex n_i zu der darüberliegenden Schicht mit dem Brechungsindex n_{i+1} ($i = 0, 1, \dots, k-1$) gilt für die Richtungsänderung von θ_i zu θ_{i+1} das SNELLIUSsche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin\theta_{i+1}}{\sin\theta_i} = \frac{n_i}{n_{i+1}} \qquad \Longrightarrow \qquad \sin\theta_{i+1} = \frac{n_i}{n_{i+1}}\sin\theta_i. \tag{3}$$

Das nachfolgende Bild zeigt den vollständigen Strahlenverlauf durch den Block:



Gleichung (3) ist ein *rekursives* Gesetz, weil es den Nachfolger $\sin\theta_{i+1}$ mit seinem Vorgänger $\sin\theta_i$ verknüpft. Um es in ein *explizites* Gesetz, das $\sin\theta_{i+1}$ mit dem Anfangswert $\sin\theta_0$ verknüpft, umzuformen, betrachten wir (3) einzeln:

$$\sin\theta_1 = \frac{n_0}{n_1}\sin\theta_0 \tag{4}$$

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1 = \frac{n_1}{n_2}\frac{n_0}{n_1}\sin\theta_0 = \frac{n_0}{n_2}\sin\theta_0 \tag{5}$$

$$\vdots \tag{6}$$

$$\sin\theta_k = \frac{n_{k-1}}{n_k}\sin\theta_{k-1} = \dots = \frac{n_0}{n_k}\sin\theta_0, \tag{7}$$

also[†]

$$\sin\theta_i = \frac{n_0}{n_i}\sin\theta_0. \tag{8}$$

Der Fortschritt Δx_i in horizontaler Richtung in der i-ten Schicht ist dann mit (8)

$$\Delta x_i = \tan\theta_i\,\Delta d = \frac{\sin\theta_i}{\sqrt{1-\sin^2\theta_i}}\,\Delta d = \frac{n_0\sin\theta_0}{\sqrt{n_i^2 - n_0^2\sin^2\theta_0}}\,\Delta d \qquad (i = 1, 2, \dots, k). \tag{9}$$

[†] Streng genommen müsste diese Aussage, etwa mit vollständiger Induktion über alle i, bewiesen werden; wir verzichten hier darauf.

Mithilfe von (9) können wir nun die einzelnen Entfernungen numerisch berechnen:

$$x_1 = 10{,}088\ \mathrm{mm} \tag{10}$$
$$x_2 = 11{,}141\ \mathrm{mm} \tag{11}$$
$$x_3 = 12{,}492\ \mathrm{mm} \tag{12}$$
$$x_4 = 14{,}311\ \mathrm{mm} \tag{13}$$
$$x_5 = 16{,}954\ \mathrm{mm}, \tag{14}$$

welches in der Summe die gesuchte Entfernung x ergibt:

$$\boldsymbol{x = 64{,}985\ \mathrm{mm} \approx 65{,}0\ \mathrm{mm}}. \tag{15}$$

b) Beim Übergang vom diskreten Aufbau der Schichten zu einem Block mit stetig veränderlichem Brechungsindex können wir von (9), (2) und (8) ausgehen. Dazu ersetzen wir die endlichen Entfernungen Δd und Δx_i in (9) durch infinitesimal kleine Schrittweiten $\mathrm{d}z$ bzw. $\mathrm{d}x$, (2) durch die Funktion

$$n(z) = n_0 - \frac{n_0 - 1}{d} z \tag{16}$$

(die tatsächlich, wie gefordert, für $z = 0$ den Brechungsindex n_0 und für $z = d$ den Brechungsindex $n = 1$ liefert) und (8) durch die Funktion

$$\sin\theta = \frac{n_0 \sin\theta_0}{n(z)}. \tag{17}$$

Wir erhalten somit

$$\mathrm{d}x = \tan\theta\, \mathrm{d}z = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}\, \mathrm{d}z = \frac{n_0 \sin\theta_0}{\sqrt{n^2(z) - n_0^2 \sin^2\theta_0}}\, \mathrm{d}z. \tag{18}$$

Diese Ausdrücke müssen nun auf beiden Seiten integriert werden. Dabei führen wir noch die Abkürzung

$$a = n_0 \sin\theta_0 \tag{19}$$

ein. Damit ergibt sich:

$$x' = \int_0^d \frac{a}{\sqrt{n^2 - a^2}}\, \mathrm{d}z. \tag{20}$$

Wir substituieren noch die Integrationsvariable z durch n vermöge (16), also

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} = -\frac{n_0 - 1}{d} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{d}z = -\frac{d}{n_0 - 1}\, \mathrm{d}n, \tag{21}$$

um das Integral

$$x' = -\frac{d}{n_0 - 1} \int_{n_0}^{1} \frac{a\, \mathrm{d}n}{\sqrt{n^2 - a^2}} = -\frac{d}{n_0 - 1} \int_{n_0}^{1} \frac{a\, \mathrm{d}n}{a\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 - 1}} = -\frac{d}{n_0 - 1} \int_{n_0}^{1} \frac{\mathrm{d}n}{\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 - 1}} \tag{22}$$

zu erhalten. Für dieses Integral benötigen wir kein WolframAlpha®; es geht mit der Substitution

$$\frac{n}{a} = \cosh u, \quad u = \operatorname{arcosh}\left(\frac{n}{a}\right), \quad \mathrm{d}n = a \sinh u\, \mathrm{d}u, \quad \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 - 1} = \sinh u \tag{23}$$

über in

$$x' = -\frac{d}{n_0 - 1} \int_{\operatorname{arcosh}\left(\frac{n_0}{a}\right)}^{\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{a}\right)} a\, \mathrm{d}u = \frac{ad}{n_0 - 1} \left(\operatorname{arcosh}\left(\frac{n_0}{a}\right) - \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{a}\right) \right). \tag{24}$$

Machen wir die Substitution (19) wieder rückgängig, erhalten wir

$$x' = \frac{n_0 d \sin\theta_0}{n_0 - 1}\left(\operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{\sin\theta_0}\right) - \operatorname{arcosh}\left(\frac{1}{n_0 \sin\theta_0}\right)\right) \tag{25}$$

$$= \frac{64}{0{,}6}\,\mathrm{mm}\cdot(\operatorname{arcosh}(2) - \operatorname{arcosh}(1{,}25)). \tag{26}$$

Da die Funktion „area cosinus hyperbolicus“ selten auf Taschenrechnern vertreten ist, hilft hier

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad (\text{für } x \geq 1). \tag{27}$$

Damit errechnen sich die Funktionswerte zu

$$\operatorname{arcosh}(2) = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) \approx 1{,}316958 \tag{28}$$

$$\operatorname{arcosh}(1{,}25) = \ln\left(1{,}25 + \sqrt{0{,}5625}\right) = \ln 2 \approx 0{,}693147. \tag{29}$$

Das Ergebnis lautet somit

$$\boldsymbol{x' = 66{,}540\ \mathrm{mm}}. \tag{30}$$

Punktverteilung:

- 0,4 Punkte für das Ergebnis (15)
- 0,6 Punkte für das Ergebnis (30)