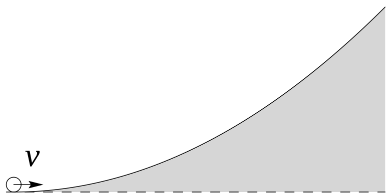
Physik-Marathon 2023

– Aufgabe 8/20 –

(03. Juli – 20. August)

Ein Rotationskörper mit dem Radius r und mit einer stückweise homogenen Massenverteilung im Innern rollt, ohne zu rutschen, eine gekrümmte Oberfläche mit der Anfangsgeschwindigkeit v hoch, wie im Bild dargestellt:



Der Körper erreicht dabei eine maximale Höhendifferenz des Schwerpunktes von $h = \frac{5v^2}{6g}$ über dem Ausgangsniveau. g ist hier die Fallbeschleunigung.

Welche geometrische Form hat der Körper? Begründe deine Antwort!

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung:

Die anfängliche kinetische Energie des Körpers E_k wandelt sich beim Hochrollen in potenzielle Energie um, bis sie im höchsten Punkt den Wert $E_\mathrm{p} = mgh$ erreicht hat und der Körper zum Stillstand kommt. Da der runde Körper rollt, hat er sowohl eine kinetische Energie (des Schwerpunkts) von $\frac{m}{2}v^2$ als auch eine Rotationsenergie (um die Schwerpunktachse) von $\frac{J_\mathrm{S}}{2}\omega^2$. Es gilt also nach dem Energiesatz:

$$\frac{m}{2}v^2 + \frac{J_\mathrm{S}}{2}\omega^2 = mgh. \tag{1}$$

Dabei ist die sog. *Rollbedingung* erfüllt: $v = r\omega$, wobei r der Radius des runden Körpers ist. Sie stellt sicher, dass der Körper „sauber“ auf der Unterlage abrollt und nicht rutscht (im letzten Fall hätte er eine translatorische Geschwindigkeit v, aber keine Winkelgeschwindigkeit ω).

Dies zusammen mit der gegebenen Höhe $h = \frac{5v^2}{6g}$ in (1) eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned} &\frac{m}{2}v^2 + \frac{J_\mathrm{S}}{2}\frac{v^2}{r^2} = \frac{mg \cdot 5v^2}{6g} \\ \Longrightarrow\quad &\frac{1}{2}\left(m + \frac{J_\mathrm{S}}{r^2}\right) = \frac{5m}{6} \\ \Longrightarrow\quad &J_\mathrm{S} = \frac{2}{3}mr^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Dieses Trägheitsmoment ist jenes einer (dünnen) **Hohlkugel(-schale)**. Gleichung (2) ist in einschlägigen Formelsammlungen zu finden; sie herzuleiten, ist eine Extra-Aufgabe, s. unten.

(Zum Vergleich: Hohlzylinder (dünne Zylinderschale) $J_\mathrm{S} = mr^2$, Vollkugel $J_\mathrm{S} = \frac{2}{5}mr^2$, Vollzylinder $J_\mathrm{S} = \frac{1}{2}mr^2$.)

Zusatz: (nicht notwendig zur Lösung dieser Aufgabe!)

Berechnung des Trägheitsmomentes einer Hohlkugelschale (Masse M, Innenradius r, Außenradius R, Dichte ϱ) um ihre Schwerpunktachse in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ): Das Volumenelement lautet $\mathrm{d}V = r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$ und der senkrechte Abstand $r_\perp$ zur Drehachse (hier der z-Achse) beträgt $r_\perp = r\sin\vartheta$ (die Variablen r in den letzten Ausdrücken sind interne Integrationsvariablen und dürfen nicht mit dem (konstanten) Innenradius r der Hohlkugelschale verwechselt werden). Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} J_\mathrm{S} &= \iiint r_\perp^2 \,\mathrm{d}m = \varrho \iiint r_\perp^2 \,\mathrm{d}V \\ &= \varrho \int_r^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin^2\vartheta \cdot r^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi = \ldots \\ &= \varrho \cdot (2\pi) \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5}(R^5 - r^5) \\ &= \frac{8}{15}\pi\varrho(R^5 - r^5) = \frac{2}{5}M\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\lim_{r\to R} J_\mathrm{S} = \lim_{r\to R} \frac{2}{5}M \cdot \left(\frac{-5r^4}{-3r^2}\right) = \frac{2}{3}MR^2. \tag{4}$$

Da das Ergebnis (3) für $r \to R$ (d. h. tatsächlich für eine *dünne* Hohlkugel*schale*) von der Form „$\frac{0}{0}$“ ist, wurde im letzten Schritt einmal die Regel von L'HOSPITAL angewendet.

Alternative Lösungen:

1. Die obige Lösung einer Hohlkugelschale ist nicht die einzige Möglichkeit für einen rotationssymmetrischen Körper, ein Trägheitsmoment von $J_\mathrm{S} = \frac{2}{3}mr^2$ anzunehmen. Für den Hohlzylinder ist bekannt, dass sein Trägheitsmoment

$$J_\mathrm{S} = \frac{1}{2}m(r^2 + r_\mathrm{i}^2) \tag{5}$$

beträgt, wobei r dessen Außen- und r_i dessen Innenradius ist. Werden beide Ausdrücke (2) und (5) gleichgesetzt, ergibt sich für die spezielle Wahl $r_\mathrm{i} = \frac{1}{\sqrt{3}}r$ ebenfalls das geforderte Trägheitsmoment. Deshalb ist ein **Hohlzylinder mit $\frac{r_\mathrm{i}}{r} = \frac{1}{\sqrt{3}}$** ebenfalls eine Lösung dieser Aufgabe.

2. Mehrere Teilnehmer:innen kamen auf folgende Idee: Man nimmt ein Rotationsparaboloid, also einen Körper, der von einer nach unten geöffneten Parabel $z(x) = h - ax^2$, die um die z-Achse rotiert, und der x, y-Ebene begrenzt wird. Die Höhe des Paraboloids ist dann h. Nun denkt man sich den Paraboloiden in infinitesimal dünne Scheiben der Dicke $\mathrm{d}z$ parallel zur Grundfläche zerschnitten. Das Quadrat des Radius' einer Scheibe in der Höhe z über der Grundfläche ist dann $x^2 = \frac{1}{a}(h-z)$, und wenn der Körper den Außenradius r bei $z = 0$ haben soll, muss $a = \frac{h}{r^2}$ oder

$$x^2 = r^2 - \frac{r^2}{h}z \tag{6}$$

gelten. Das Massenelement $\mathrm{d}m$ und das infinitesimale Trägheitsmoment $\mathrm{d}J$ einer solchen (zylindrischen) Scheibe sind dann:

$$\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V = \varrho\pi x^2\,\mathrm{d}z = \varrho\pi\left(r^2 - \frac{r^2}{h}z\right)\mathrm{d}z \tag{7}$$

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}m = \frac{\varrho\pi}{2}\left(r^2 - \frac{r^2}{h}z\right)^2\mathrm{d}z = \frac{\varrho\pi}{2}\left(r^4 - \frac{2r^4}{h}z + \frac{r^4}{h^2}z^2\right)\mathrm{d}z. \tag{8}$$

Beides von $z = 0$ bis $z = h$ integriert, ergibt:

$$m = \varrho\pi r^2\int_0^h\left(1 - \frac{z}{h}\right)\,\mathrm{d}z = \frac{\varrho\pi}{2}r^2h \tag{9}$$

$$J = \frac{\varrho\pi}{2}r^4\int_0^h\left(1 - \frac{2z}{h} + \frac{z^2}{h^2}\right)\,\mathrm{d}z = \frac{\varrho\pi}{6}r^4h. \tag{10}$$

Aus (9) die Dichte ϱ in (10) eingesetzt, liefert das Ergebnis $J = \frac{1}{3}mr^2$ (unabhängig von der Höhe h). Dies gilt für ein Paraboloid. Setzt man schließlich zwei derartige Paraboloide an ihren Grundflächen zu einem **Doppelrotationsparaboloiden** zusammen, erhält man ebenso das gewünschte Trägheitsmoment von $J_\mathrm{S} = \frac{2}{3}mr^2$.

3. Drei Teilnehmer bzw. Teilnehmerinnen präsentierten Lösungen, die teilweise sehr exotisch sind. Große Anerkennung dafür! Leider erlaubt es die Zeit nicht, diese hier anzugeben.

Bemerkungen:

1. Manche Teilnehmer:innen gaben als Antwort einfach *„Hohlkugel"* an, und nicht *„dünne Hohlkugelschale"*. Wir waren hierbei sehr tolerant und haben die erste Antwort auch als korrekt gewertet.

2. Wie oben geschrieben, war eine explizite Berechnung von Trägheitsmomenten nicht notwendig zur Lösung der Aufgabe. Die meisten Teilnehmer:innen haben das Ergebnis $J = \frac{2}{3}mr^2$ in

Tabellenwerken oder bei Wikipedia nachgeschlagen, was völlig in Ordnung ist. Allerdings hat es ein Teilnehmer oder eine Teilnehmerin geschafft, das Dreifachintegral per Hand wie im obigen Zusatz durchzurechnen.

3. Eigentlich viel besser als das Vorgehen mit der Regel von L'Hospital, um von (3) auf (4) zu kommen, ist eine Polynomdivision:

$$\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} = \frac{(R-r)(R^4 + R^3 r + R^2 r^2 + R r^3 + r^4)}{(R-r)(R^2 + Rr + r^2)} = \frac{R^4 + R^3 r + R^2 r^2 + R r^3 + r^4}{R^2 + Rr + r^2}$$

$$\implies \quad \lim_{r \to R} \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} = \frac{5}{3},$$

wie einige Teilnehmer:innen bemerkten (Quelle: Matheplanet), weil sich dann die störenden Differenzen einfach herauskürzen.

Punktverteilung:

- 0,3 Punkte für den Energieansatz (1)
- 0,1 Punkte für die Rollbedingung $v = r\omega$
- 0,4 Punkte für das Trägheitsmoment (2)
- 0,2 Punkte für das Erkennen, dass es zu einem der o. g. Körper gehört