Physik-Marathon 2023

– Aufgabe 5/20 –

(19. Juni – 25. Juni)

Eine Studentin führt ein Experiment durch, um den Elastizitätsmodul eines Drahtes zu bestimmen. Die Länge des Drahtes beträgt 1,5 m mit einer Unsicherheit von 0,3 mm. Sie misst im Versuch die Verlängerung des Drahtes zu 0,8 mm mit einer Unsicherheit von 0,05 mm bei einer Last von exakt 1 kg. Die Studentin misst außerdem den Durchmesser des Drahtes zu 0,4 mm mit einer Unsicherheit von 0,01 mm. Es sei $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, dieser Wert sei als exakt angenommen.

Berechne den Elastizitätsmodul einschließlich seiner absoluten Messunsicherheit!

Bemerkung: Die Berechnungsmethode der Messunsicherheit ist nicht weiter eingeschränkt.

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung:
Die Gleichung, die diesem Experiment zugrunde liegt, lautet

$$\sigma = E\varepsilon \qquad \text{bzw.} \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \tag{1}$$

wobei

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{2}$$

die Zugspannung,

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \tag{3}$$

die Dehnung und E der Elastizitätsmodul ist. Mit $F = mg$ als Zugkraft und $A = \frac{\pi}{4}d^2$ als Querschnittsfläche des Drahtes ergibt sich der Elastizitätsmodul zu

$$E = \frac{4Fl_0}{\pi d^2\,\Delta l} = \frac{4mgl_0}{\pi d^2\,\Delta l} = \mathbf{1{,}464 \cdot 10^{11}\ Pa = 146{,}4\ GPa}. \tag{4}$$

Von den fünf hierin auftretenden Größen sind zwei (m und g) exakt vorgegeben und die anderen drei (l_0, Δl und d) mit Messunsicherheiten behaftet.

Zur Berechnung der absoluten Messunsicherheit ΔE des Elastizitätsmoduls (der ja keine direkt gemessene Größe ist, sondern mit (4) aus Messgrößen *berechnet* wird), wird das *lineare Fehlerfortpflanzungsgesetz* herangezogen:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \left|\frac{\partial E}{\partial l_0}\right| \Delta l_0 + \left|\frac{\partial E}{\partial \Delta l}\right| \Delta(\Delta l) + \left|\frac{\partial E}{\partial d}\right| \Delta d \\ &= \frac{4mg}{\pi d^2 \Delta l}\,\Delta l_0 + \frac{4mgl_0}{\pi d^2 \Delta l^2}\,\Delta(\Delta l) + \frac{8mgl_0}{\pi d^3 \Delta l}\,\Delta d,\end{aligned} \tag{5}$$

wobei $\Delta l_0 = 0{,}3\,\text{mm}$, $\Delta(\Delta l) = 0{,}05\,\text{mm}$ und $\Delta d = 0{,}01\,\text{mm}$ die Messunsicherheiten von Länge, Verlängerung und Durchmesser des Drahtes sind. Prinzipiell kann nun mit (5) gerechnet werden:

$$\Delta E = 0{,}03\ \text{GPa} + 9{,}15\ \text{GPa} + 7{,}32\ \text{GPa} = \mathbf{16{,}5\ GPa}. \tag{6}$$

Es geht aber etwas einfacher. Dividiert man (5) durch E, entsteht auf der linken Seite die relative Messunsicherheit $\frac{\Delta E}{E}$, und auf der rechten Seite verkürzt sich der Ausdruck mit (4) zu einer (gewichteten) Summe der relativen Messunsicherheiten (die Gewichte sind dabei die Beträge der Exponenten der Größen in (4)). Diese Summe ist viel einfacher zu berechnen als mittels Gleichung (5):

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta l_0}{l_0} + \frac{\Delta(\Delta l)}{\Delta l} + 2\frac{\Delta d}{d} \tag{7}$$

$$= \frac{0{,}3\ \text{mm}}{1500\ \text{mm}} + \frac{0{,}05\ \text{mm}}{0{,}8\ \text{mm}} + 2\,\frac{0{,}01\ \text{mm}}{0{,}4\ \text{mm}} = 0{,}0002 + 0{,}0625 + 0{,}05 = 0{,}1127 \approx 11{,}3\,\%. \tag{8}$$

Dies ist die relative Messunsicherheit. Es ergibt sich schließlich mit (8) und (4)

$$E \pm \Delta E = \mathbf{146{,}4\ GPa \pm 16{,}5\ GPa}. \tag{9}$$

Alternative Berechnung der Messunsicherheit. Man kann auch das *quadratische (oder gaußsche) Fehlerfortpflanzungsgesetz* heranziehen, wenn die unsicherheitsträchtigen Größen unabhängig voneinander sind:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial l_0}\,\Delta l_0\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial \Delta l}\,\Delta(\Delta l)\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial d}\,\Delta d\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{4mg}{\pi d^2 \Delta l}\,\Delta l_0\right)^2 + \left(\frac{4mgl_0}{\pi d^2 \Delta l^2}\,\Delta(\Delta l)\right)^2 + \left(\frac{8mgl_0}{\pi d^3 \Delta l}\,\Delta d\right)^2},\end{aligned} \tag{10}$$

welches

$$E \pm \Delta E = \mathbf{146{,}4\,GPa} \pm \mathbf{11{,}7\,GPa} \tag{11}$$

ergibt. Ähnlich wie in (7) kann man hier auch kürzer mit dem relativen Fehler rechnen, indem man (10) durch E dividiert:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta E}{E} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta l_0}{l_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(\Delta l)}{\Delta l}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta d}{d}\right)^2} \\ &= \sqrt{0{,}0002^2 + 0{,}0625^2 + 0{,}05^2} = 0{,}08 = 8\,\%. \end{aligned} \tag{12}$$

Hieran ist zu erkennen, dass die GAUSSsche Fehlerfortpflanzung (12) eine kleinere Fehlerschranke liefert als die lineare Fehlerfortpflanzung (8).

Weitere „naive" Methode: Schließlich kann auch wie folgt argumentiert werden: Man setzt in (4) für die fehlerbehafteten Größen $l_0 + \Delta l_0$, $\Delta l - \Delta(\Delta l)$ und $d - \Delta d$ ein, um den maximalen E-Modul zu bestimmen:

$$E_{\max} = \frac{4F(l_0 + \Delta l)}{\pi(d - \Delta d)^2\,(\Delta l - \Delta(\Delta l))} = 164{,}27\,\text{GPa}, \tag{13}$$

und die entsprechend entgegengesetzten Größen $l_0 - \Delta l_0$, $\Delta l + \Delta(\Delta l)$ und $d + \Delta d$, um den minimalen E-Modul zu bestimmen:

$$E_{\min} = \frac{4F(l_0 - \Delta l)}{\pi(d + \Delta d)^2\,(\Delta l + \Delta(\Delta l))} = 131{,}10\,\text{GPa}. \tag{14}$$

Nun kann mit Differenzbildung eine Abschätzung der Messunsicherheit durchgeführt werden:

$$\Delta E = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{2} = \mathbf{16{,}6\,GPa}, \tag{15}$$

sodass hier das Ergebnis

$$E \pm \Delta E = \mathbf{147{,}7\,GPa} \pm \mathbf{16{,}6\,GPa} \tag{16}$$

lautet. Allerdings ist es zweifelhaft, den Elastizitätsmodul auf diese Weise zu ermitteln. Es ist allemal besser, direkt (4) zu benutzen.

Wir bewerten alle drei möglichen Ergebnisse (9), (11) und (16) als richtig, da die Methode zur Berechnung von ΔE nicht weiter eingeschränkt wurde.

Bemerkungen:

1. Diese Aufgabe beinhaltet die Auswertung eines Experimentes. Die gemessenen Werte sind nur mit wenigen gültigen Ziffern ermittelt worden. Deshalb ist es wenig sinnvoll, einen errechneten E-Modul z. B. als $E = 146{,}3728117$ GPa anzugeben, nur weil der Taschenrechner so viel Stellen anzeigt. Bereits hier muss sinnvoll gerundet werden†. Wir haben dies jedoch nicht mit Punktabzug bestraft.

2. Einige Teilnehmende haben die obige, als „naiv" bezeichnete Methode benutzt (also ohne Fehlerfortpflanzung per linearem oder quadratischem Gesetz), allerdings mit korrekter Berechnung von E nach (4). Dies liefert konsequenterweise verschiedene Fehlerschranken nach oben und nach unten. Dies ist nicht üblich, aber im Rahmen dieser Aufgabe vertretbar. Auch dies minderte die erreichten Punkte nicht.

† `https://www.ptb.de/cms/fileadmin/internet/fachabteilungen/abteilung_1/1.2_festkoerpermechanik/1.22/276._PTB-Seminar.Teil_4.Rundungsregeln.pdf`

Punktverteilung:

- 0,1 Punkte Abzug, wenn irgendeine falsche Eingangsgröße verwendet wurde (z. B. $l = 1\,\text{m}$ anstatt $l = 1{,}5\,\text{m}$), der Rest aber richtig gerechnet wurde
- 0,1 Punkte Abzug, wenn ein Größenordnungsfehler auftritt (z. B. MPa anstelle von GPa)
- 0,1 Punkte Abzug, wenn nach der naiven Methode richtig gerechnet wurde, dann aber nur die Grenzen des Intervalls, nicht aber die halbe Breite des Intervalls als Unsicherheit angegeben wurde
- 0,3 Punkte Abzug, wenn E außerhalb des Intervalls $146\,\text{GPa} \leq E \leq 147\,\text{GPa}$ liegt, und unklar ist, wie das Ergebnis zustandekommt
- 0,3 Punkte Abzug, wenn ΔE außerhalb des Intervalls $11\,\text{GPa} \leq \Delta E \leq 17\,\text{GPa}$ liegt, und unklar ist, wie das Ergebnis zustandekommt
- nur insgesamt 0,5 Punkte, wenn der Wert von E stimmt, aber die Messunsicherheitsberechnung völlig offen bleibt
- 0,05 Punkte Abzug, wenn irgendwo zwischendurch zu stark gerundet wurde (z. B. die Querschnittsfläche $A = 0{,}126\,\text{mm}^2$ auf $0{,}13\,\text{mm}^2$ aufgerundet)
- kein Punktabzug, wenn zu viele signikante Ziffern in einem Ergebnis angegeben wurden