Physik-Marathon 2023

– Aufgabe 4/20 –

(12. Juni – 18. Juni)

Auf dem Boden eines Schwimmbeckens liegt ein kleiner Ring, der hier als punktförmiges Objekt angenommen wird. Das Auge A eines Mädchens befindet sich in der Höhe h über der glatten Oberfläche des Beckens. Der Lichtstrahl vom Ring zum Auge tritt in einer horizontalen Entfernung w vom Mädchen aus der Wasseroberfläche aus. (Mit anderen Worten: Oberhalb der Wasseroberfläche sind die horizontale und vertikale Entfernung vom Lichtaustrittspunkt zum Auge w bzw. h.)

Wenn sie versucht, mit einem geraden Spieß (von A aus) so ins Wasser zu stechen, dass der Winkel zwischen Spieß und Wasseroberfläche $\delta < 90\,^\circ$ beträgt, trifft sie den Ring. Die Brechzahl des Wassers sei n.

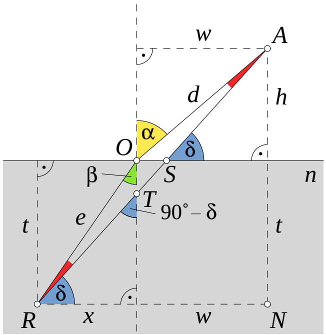
Leite eine Gleichung her, mit der die Tiefe t des Beckens berechnet werden kann, die nur die Größen h, w, δ und n enthält!

Tipp: Es sind hier vor allem geometrische Überlegungen anzustellen; die Physik dahinter ist recht übersichtlich.

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung:

(Bild) Das Auge A sieht das Bild des Ringes R in Punkt O, in dem der Lichstrahl $A - O - R$ gebrochen wird. Die horizontale Entfernung zwischen O und A beträgt w, die vertikale h. Der Abstand $OA = \sqrt{w^2 + h^2}$ wird im Folgenden mit d abgekürzt. Der Einfallswinkel von A sei mit α und der Brechungswinkel mit β bezeichnet. Der Spieß AR trifft die Wasseroberfläche in Punkt S und das Lot zur Wasseroberfläche im Punkt O in T. Hier tritt der Winkel δ bzw. $90\,^\circ - \delta$ auf. Die Strecke OR hat die Länge e und die gesuchte Tiefe des Beckens sei t.



Weiterhin gilt in den beiden rechtwinkligen Dreiecken oberhalb der Wasseroberfläche:

$$\sin\alpha = \frac{w}{d} = \frac{w}{\sqrt{w^2+h^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{h}{d} = \frac{h}{\sqrt{w^2+h^2}} \qquad \text{und} \qquad \tan\alpha = \frac{w}{h}. \tag{1}$$

Ziel der folgenden Rechnungen ist es, im Dreieck AOR die Seite $OR = e$ mithilfe des Sinussatzes zu berechnen, um daraus anschließend die Tiefe t zu ermitteln. Der Sinussatz lautet mit den hier benutzten Bezeichnungen:

$$\frac{d}{\sin(\sphericalangle ORA)} = \frac{e}{\sin(\sphericalangle OAR)} \qquad \Longrightarrow \qquad e = \frac{\sin(\sphericalangle OAR)}{\sin(\sphericalangle ORA)}\, d = \frac{t}{\cos\beta}. \tag{2}$$

Im Dreieck OAS ist δ Außenwinkel und als solcher gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel $90\,^\circ - \alpha$ und $\sphericalangle OAR$. Somit gilt $\sphericalangle OAR = \alpha + \delta - 90\,^\circ$ und weiter mit (1)

$$\begin{aligned} \sin(\sphericalangle OAR) &= \sin(\alpha + \delta - 90\,^\circ) = -\cos(\alpha+\delta) = \sin\alpha\sin\delta - \cos\alpha\cos\delta \\ &= \frac{w\sin\delta - h\cos\delta}{d}. \end{aligned} \tag{3}$$

Im Dreieck ORT ist $90\,^\circ - \delta$ Außenwinkel und gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel β und $\sphericalangle ORA$. Somit gilt $\sphericalangle ORA = 90\,^\circ - \delta - \beta$ und damit

$$\sin(\sphericalangle ORA) = \sin(90\,^\circ - \delta - \beta) = \cos(\beta + \delta) = \cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta. \tag{4}$$

Während bisher nur rein geometrische Betrachtungen erfolgten, kommt nun die Physik ins Spiel. Nach dem SNELLIUSschen Brechungsgesetz

$$\sin\alpha = n\sin\beta \qquad \Longleftrightarrow \qquad n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \tag{5}$$

bzw. ausführlich

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{w}{nd} = \frac{w}{n\sqrt{w^2+h^2}} \tag{6}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{w^2}{n^2d^2}} = \frac{\sqrt{n^2d^2 - w^2}}{nd} = \frac{\sqrt{n^2(w^2+h^2) - w^2}}{n\sqrt{w^2+h^2}} \tag{7}$$

$$\tan\beta = \frac{w}{\sqrt{n^2d^2 - w^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2(w^2+h^2)}{w^2} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{nh}{w}\right)^2 + n^2 - 1}} \tag{8}$$

folgt aus (4)

$$\sin(\sphericalangle ORA) = \frac{\sqrt{n^2d^2 - w^2}\cos\delta - w\sin\delta}{nd}. \tag{9}$$

Nun lässt sich t mithilfe von (2), (3) und (5) in Abhängigkeit von h, w, δ und n wie gewünscht angeben:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{\sin(\sphericalangle OAR)}{\sin(\sphericalangle ORA)}\, d\cos\beta \\
&= \frac{(w\sin\delta - h\cos\delta)}{d} \cdot \frac{nd}{\sqrt{n^2d^2 - w^2}\cos\delta - w\sin\delta} \cdot d \cdot \frac{\sqrt{n^2d^2 - w^2}}{nd} \\
&= \frac{(w\sin\delta - h\cos\delta)\sqrt{n^2(w^2+h^2) - w^2}}{\sqrt{n^2(w^2+h^2) - w^2}\cos\delta - w\sin\delta} && (10)\\
&= \frac{(w\tan\delta - h)\sqrt{n^2(w^2+h^2) - w^2}}{\sqrt{n^2(w^2+h^2) - w^2} - w\tan\delta} && (11)\\
&= \frac{(w - h\cot\delta)\sqrt{n^2(w^2+h^2) - w^2}}{\sqrt{n^2(w^2+h^2) - w^2}\cot\delta - w}. && (12)
\end{aligned}$$

Dies sind nur einige der möglichen Lösungen. Lässt man Doppelbrüche zu, kommen folgende Varianten hinzu:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{w\sin\delta - h\cos\delta}{\cos\delta - \frac{w}{\sqrt{n^2(w^2+h^2)-w^2}}\sin\delta} && (13)\\
&= \frac{w\tan\delta - h}{1 - \frac{w}{\sqrt{n^2(w^2+h^2)-w^2}}\tan\delta} && (14)\\
&= \frac{w - h\cot\delta}{\cot\delta - \frac{w}{\sqrt{n^2(w^2+h^2)-w^2}}} && (15)\\
&= n\frac{\sqrt{w^2+h^2-\left(\frac{w}{n}\right)^2}\left(w - \frac{h}{\tan\delta}\right)}{\frac{n}{\tan\delta}\sqrt{w^2+h^2-\left(\frac{w}{n}\right)^2} - w} && (16)\\
&= \frac{w\tan\delta - h}{1 - \sqrt{\frac{1}{\frac{(w^2+h^2)n^2}{w^2} - 1}}\tan\delta}. && (17)
\end{aligned}$$

Lässt man darüber hinaus noch Arkusfunktionen zu, kommt man auf folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{w\tan\delta - h}{1 - \tan\delta\cdot\tan\left(\arcsin\left(\frac{\sin\left(\arctan\left(\frac{w}{h}\right)\right)}{n}\right)\right)} && (18)\\
&= \frac{w\tan\delta - h}{1 - \tan\delta\cdot\tan\left(\arcsin\left(\frac{w}{n\sqrt{w^2+h^2}}\right)\right)}. && (19)
\end{aligned}$$

Es gibt hier also viele richtige Varianten für die gesuchte Gleichung, je nachdem wie der Bruch in (10) weiter gekürzt, erweitert oder äquivalent umgeformt wird.

Alternative Lösung: Wir führen noch die horizontale Entfernung x zwischen den Punkten O und R ein (s. Bild oben). Dann gilt im großen unteren rechtwinkligen Dreieck ARN

$$\tan\delta = \frac{h+t}{w+x} \quad\Longrightarrow\quad t = (w+x)\tan\delta - h. \tag{20}$$

Aus dem Brechungsgesetz (5) folgt

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\frac{w}{d}}{\frac{x}{e}} = \frac{we}{xd} = \frac{w\sqrt{t^2+x^2}}{x\sqrt{w^2+h^2}}, \tag{21}$$

woraus x berechnet wird:

$$\begin{aligned} n^2 &= \frac{w^2(t^2+x^2)}{x^2(w^2+h^2)} = \frac{w^2t^2+w^2x^2}{w^2x^2+h^2x^2} \\ \Longrightarrow \quad & (n^2w^2+n^2h^2-w^2)x^2 = w^2t^2 \\ \Longrightarrow \quad & x = \frac{wt}{\sqrt{n^2w^2+n^2h^2-w^2}}. \end{aligned} \tag{22}$$

Nun kann (22) in (20) eingesetzt werden, um alle „zugelassenen“ Größen beisammen zu haben:

$$\begin{aligned} t = w\tan\delta + x\tan\delta - h = w\tan\delta + \frac{wt\tan\delta}{\sqrt{n^2w^2+n^2h^2-w^2}} - h \\ \Longrightarrow \quad \left(1 - \frac{w\tan\delta}{\sqrt{n^2(w^2+h^2)-w^2}}\right)t = w\tan\delta - h. \end{aligned} \tag{23}$$

Division durch den Ausdruck in runden Klammern auf der linken Seite führt auf das Ergebnis (14).

Bemerkungen:

1. Zugegebenermaßen ist diese Aufgabe nicht gerade eines der schönsten physikalischen Probleme. Der Gedanke dahinter war, auch mal eine Aufgabe aus der Strahlenoptik ins Feld zu führen, die sich um das SNELLIUSsche Brechungsgesetz rankt. Nur hätte man die Lösungsmöglichkeiten eventuell einschränken sollen (keine Doppelbrüche, keine Arkusfunktionen, s. oben).

2. Einige Teilnehmende kamen auf eine quadratische Gleichung, die es zu lösen galt. Der Radikant unter der Wurzel war jedoch so umfangreich, dass er ohne explizites Ausmultiplizieren und Vereinfachen nicht dazu zu bringen war, sich als null zu outen. Ich behaupte, es handelt sich in diesem Fall bei der Tiefe t immer um eine Doppelwurzel, d. h., wir haben tatsächlich nur eine Lösung.

Punktverteilung:

- 0,0 Punkte, wenn der Spieß in der Lösung nicht richtig zu erkennen ist
- 0,5 Punkte, wenn der Brechungsindex im SNELLIUSschen Brechungsgesetz (5) aus Versehen auf die falsche Seite gerutscht ist, aber die restliche Rechnung fehlerfrei ist
- 0,5 Punkte, wenn irgendwo in der Rechnung ein trigonometrischer Fehler passiert ist, aber die restliche Rechnung fehlerfrei ist
- 0,9 Punkte, wenn das negative Ergebnis herauskommt, also irgendwo ein Vorzeichenfehler gemacht wurde
- 0,95 Punkte, wenn nur ein Flüchtigkeitsfehler kurz vor Schluss passiert ist