Physik-Marathon 2023

– Aufgabe 20/20 –

(16. Oktober – 29. Oktober)

Ein Schwimmbecken wird mithilfe dreier Rohrleitungen gefüllt, jede Leitung besitzt dabei eine eigene Füllrate. Es ist bekannt, dass, wenn Leitung 1 und 2 zugleich benutzt werden, es 23 Minuten dauert, bis das Becken voll ist. Werden die Leitungen 1 und 3 benutzt, dauert es 31 Minuten und werden schließlich die Leitungen 2 und 3 benutzt, dauert es nur 17 Minuten.

a) Berechne die drei Zeiten, die benötigt werden, wenn die drei Rohrleitungen das Becken einzeln füllen!

b) Wie lange dauert es, wenn alle drei Leitungen zugleich das Becken füllen?

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung:

Das Volumen des Schwimmbeckens sei V, die Volumenströme der drei Rohrleitungen $I_{\mathrm{V}1}$, $I_{\mathrm{V}2}$ bzw. $I_{\mathrm{V}3}$ und die benötigten Zeiten, um mit zwei Leitungen das Becken volllaufen zu lassen, $t_{12} = 23$ min, $t_{13} = 31$ min und $t_{23} = 17$ min. Dann gelten folgende Gleichungen für die Volumenströme:

$$I_{\mathrm{V}1} + I_{\mathrm{V}2} = \frac{V}{t_{12}}, \qquad I_{\mathrm{V}1} + I_{\mathrm{V}3} = \frac{V}{t_{13}}, \qquad I_{\mathrm{V}2} + I_{\mathrm{V}3} = \frac{V}{t_{23}}. \tag{1}$$

a) Die Gleichungen (1) bilden ein lineares Gleichungssystem für die Einzelvolumenströme $I_{\mathrm{V}1}$, $I_{\mathrm{V}2}$, $I_{\mathrm{V}3}$ mit folgender Lösung:

$$I_{\mathrm{V}1} = \frac{V}{2}\left(\frac{1}{t_{12}} + \frac{1}{t_{13}} - \frac{1}{t_{23}}\right) = \frac{V}{t_1} \tag{2}$$

$$I_{\mathrm{V}2} = \frac{V}{2}\left(\frac{1}{t_{12}} - \frac{1}{t_{13}} + \frac{1}{t_{23}}\right) = \frac{V}{t_2} \tag{3}$$

$$I_{\mathrm{V}3} = \frac{V}{2}\left(-\frac{1}{t_{12}} + \frac{1}{t_{13}} + \frac{1}{t_{23}}\right) = \frac{V}{t_3}. \tag{4}$$

Daraus können die Zeiten t_1, t_2 und t_3 berechnet werden, die nötig sind, wenn die Rohre einzeln das Becken füllen:

$$t_1 = \frac{2}{\frac{1}{t_{12}} + \frac{1}{t_{13}} - \frac{1}{t_{23}}} = \mathbf{118{,}3\ min} \tag{5}$$

$$t_2 = \frac{2}{\frac{1}{t_{12}} - \frac{1}{t_{13}} + \frac{1}{t_{23}}} = \mathbf{28{,}6\ min} \tag{6}$$

$$t_3 = \frac{2}{-\frac{1}{t_{12}} + \frac{1}{t_{13}} + \frac{1}{t_{23}}} = \mathbf{42{,}0\ min}. \tag{7}$$

b) Werden alle drei Gleichungen (1) addiert, so ergibt sich:

$$2\left(I_{\mathrm{V}1} + I_{\mathrm{V}2} + I_{\mathrm{V}3}\right) = \frac{V}{t_{12}} + \frac{V}{t_{13}} + \frac{V}{t_{23}} = \frac{2V}{t_{123}}. \tag{8}$$

Daraus folgt für die gesuchte Zeit t_{123}:

$$t_{123} = \frac{2}{\frac{1}{t_{12}} + \frac{1}{t_{13}} + \frac{1}{t_{23}}} = \mathbf{14{,}9\ min}. \tag{9}$$

Da wir es hier mit einem linearen Gleichungssystem mit ganzzahligen Koeffizienten zu tun haben, lässt sich die gefundene Lösung sogar in rationaler Form angeben:

$$t_1 = \frac{24242}{205}\,\mathrm{min}, \quad t_2 = \frac{24242}{849}\,\mathrm{min}, \quad t_3 = \frac{24242}{577}\,\mathrm{min}, \quad t_{123} = \frac{24242}{1631}\,\mathrm{min}. \tag{10}$$

Punktverteilung:

- 0,75 Punkte für die Ergebnisse (5), (6) und (7)
- 0,25 Punkte für das Ergebnis (9)