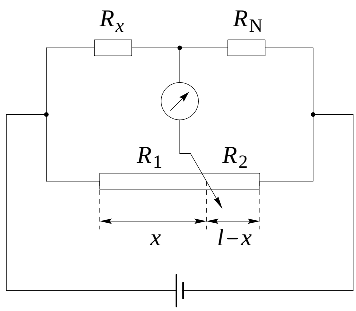
Physik-Marathon 2023

– Aufgabe 2/20 –

(29. Mai – 04. Juni)

Mit einer WHEATSTONE-Brücke lassen sich unbekannte Widerstände einfach ermitteln. Dabei werden ein unbekannter Widerstand R_x und ein bekannter Widerstand R_N in Reihe geschaltet und ein Potentiometer (oder Schiebewiderstand), bestehend aus R_1 und R_2, parallel dazu, wie im folgenden Bild zu sehen ist:



Der Mittelabgriff des Potentiometers ist verschiebbar und unterteilt den Gesamtwiderstand in die Anteile R_1 und R_2, die proportional zu den Längen x und $l - x$ sind, wobei l die Gesamtlänge der Brücke bzw. des Potentiometers ist.

In einer solchen Brücke befinden sich ein bekannter Widerstand $R_\mathrm{N} = 8\ \Omega$ und ein unbekannter Widerstand R_x größer als $8\ \Omega$. Die Länge der Brücke beträgt $l = 20$ cm.

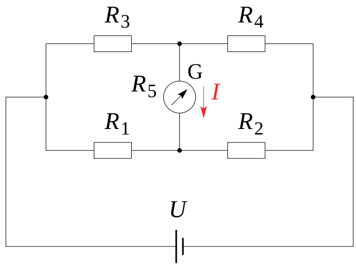
Werden R_x und R_N nun vertauscht, verschiebt sich der Abgleichpunkt um 4 cm.

Berechne den unbekannten Widerstand R_x!

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung:

Die vollständige WHEATSTONE-Brücke besteht aus vier Widerständen R_1 bis R_4, einer Spannungsquelle U und einem Galvanometer G mit dem Innenwiderstand R_5, siehe nachfolgendes Bild.



Hier ist $R_3 = R_x$ und $R_4 = R_\text{N}$. Im allgemeinen Fall, wenn die Widerstände beliebig gewählt werden, fließt durch jeden Widerstand ein unterschiedlicher Strom, und der Brückenstrom I wird vom Galvanometer angezeigt. Es ist eine Extra-Aufgabe, mithilfe der KIRCHHOFFschen Gesetze (Knoten- und Maschensatz) auszurechnen, dass für den Brückenstrom gilt:

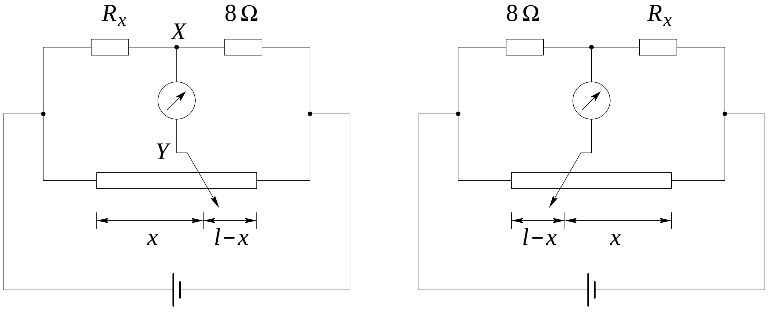
$$I = \frac{R_1R_4 - R_2R_3}{(R_1+R_2)R_3R_4 + (R_3+R_4)R_1R_2 + (R_1+R_2)(R_3+R_4)R_5}\,U. \tag{1}$$

Der Brückenstrom wird null, wenn $R_1R_4 = R_2R_3$ oder $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ gilt, dies ist die *abgeglichene* Brücke. In der praktischen Anwendung werden R_1 und R_2 als Schiebewiderstand oder Potentiometer ausgeführt, sodass stets $R_1 + R_2 = \text{const}$ ist und

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{x}{l-x} \tag{2}$$

gilt, wobei $l_1 = x$, $l_2 = l - x$ die zu R_1, R_2 proportionalen Längen sind.

Bei abgeglichener Brücke fließt also im Querzweig XY kein Strom ($I = 0$), weshalb die Punkte X und Y auf gleichem Potenzial liegen, siehe nachfolgendes linkes Bild.



Mit $l = 20$ cm als Länge des Potentiometers in der Brücke, R_x als unbekanntem Widerstand, $R_\text{N} = 8\ \Omega$ und x als Entfernung des Abgleichpunktes Y vom linken Ende der Brücke[†] lautet die Abgleichbedingung nach (2)

$$\frac{x}{l-x} = \frac{R_x}{R_\text{N}}. \tag{3}$$

[†](immer von demjenigen Ende aus gesehen, an dem R_x verschaltet ist)

Werden nun bekannter und unbekannter Widerstand vertauscht (rechtes Bild oben), muss die Brücke neu abgeglichen werden, und zwar so, dass x und $l - x$ ihre „Plätze“ tauschen. Die Abgleichbedingung (3) ist auch hier erfüllt. Daraus folgt mit $\Delta x = 4\,\text{cm}$:

$$|x - (l - x)| = \begin{cases} 2x - l = \Delta x & \Longrightarrow \quad x = 12\,\text{cm} \quad \Longrightarrow \quad R_x = 12\,\Omega \\ l - 2x = \Delta x & \Longrightarrow \quad x = 8\,\text{cm} \quad \Longrightarrow \quad R_x = 5{,}33\,\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Es stehen Betragsstriche auf der linken Seite von (4), weil nicht vorgegeben wurde, ob sich der Abgleichpunkt nach links oder nach rechts verschiebt, sodass eine Fallunterscheidung notwendig wird.

Da der unbekannte Widerstand größer als $8\,\Omega$ sein soll, lautet die Lösung $R_x = \mathbf{12\,\Omega}$.

Alternative Lösung: Wir setzen anstelle von (3)

$$\frac{R_x}{R_\text{N}} = \frac{x}{l - x} = \frac{l - (x \mp \Delta x)}{x \mp \Delta x} \tag{5}$$

an (das $\mp$ bedeutet, dass wir nicht wissen, in welche Richtung sich der Abgleichpunkt verschiebt). Daraus folgt weiter

$$\begin{aligned} x^2 \mp x\,\Delta x &= l^2 - lx - l(x \mp \Delta x) + x(x \mp \Delta x) \\ 0 &= l^2 - 2lx \pm l\,\Delta x \\ x &= \frac{l \pm \Delta x}{2} = \begin{cases} 12\,\text{cm} & \Longrightarrow \quad R_x = 12\,\Omega \\ 8\,\text{cm} & \Longrightarrow \quad R_x = 5{,}33\,\Omega, \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

was mit (4) übereinstimmt.

Bemerkungen:

1. Da in der Aufgabenstellung nicht explizit stand, dass (2) bzw. (3) herzuleiten ist, darf die Abgleichbedingung als bekannt vorausgesetzt werden. Schon gar nicht muss etwa (1) abgeleitet werden. Viele Teilnehmende haben die Abgleichbedingung trotzdem kurz und völlig korrekt hergeleitet, was zu einem anerkennenden „Schulterklopfen“ führte, ohne Auswirkung auf die Bepunktung.

2. Viele Teilnehmende übersahen allerdings die oben geschilderte Fallunterscheidung und kamen „geradezu“ auf das richtige Ergebnis. Wenn überhaupt kein Hinweis zu entdecken war, dass es auch eine zweite Lösung gibt, die ausgeschlossen werden muss ($R_x = 5{,}33\,\Omega$), haben wir in diesem Fall (nur) 0,1 Punkte abgezogen. Die vielleicht kürzeste Argumentationskette, dass nur $x = 12\,\text{cm}$ infrage kommt, lautet

$$R_x > R_\text{N} \quad \Longrightarrow \quad x > l - x \quad \Longrightarrow \quad 2x > l \quad \Longrightarrow \quad x > \frac{l}{2}. \tag{7}$$

Wir hoffen, dass wir nicht ein Detail in den Lösungen von denjenigen Einsendungen übersehen haben, die (7) benutzt haben und trotzdem nur 0,9 Punkte bekommen haben.

3. Ein Teilnehmender schreibt: „Da sich der Abgleichpunkt bei einem Widerstandstausch um 4 cm verschiebt, muss er anfangs 2 cm von der Mitte entfernt sein, da er sich entlang des Mittelpunkts spiegeln muss. Da die Brückenlänge gleich 20cm und $R_x > R_\text{N}$ ist, muss $x = 12\text{cm}$ sein.“ – Wir waren begeistert von diesem Argument.

Punktverteilung:

- 0,5 Punkte für (2) oder (3) oder eine äquivalente Gleichung
- 0,1 Punkte dafür, wenn wie in (5) mit $x - \Delta x$ oder $x + \Delta x$ weitergerechnet wird
- 0,4 Punkte für den Rest bis $R_x = 12\,\Omega$
- 0,1 Punkte Abzug, wenn die Fallunterscheidung $\pm\Delta x$ nicht erkannt wurde
- insgesamt 0,2 Punkte, wenn nur das blanke richtige Ergebnis dasteht ohne jegliche Erklärung oder Rechenweg
- insgesamt 0,75 Punkte, wenn der Rechenweg vollständig richtig ist, aber zwischendurch ein lapidarer Fehler gemacht wurde (Klammern vergessen o. Ä.)