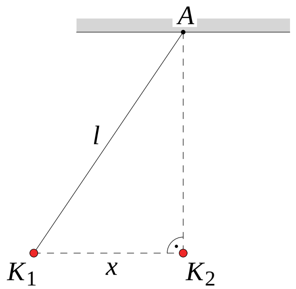
Physik-Marathon 2023

– Aufgabe 19/20 –

(16. Oktober – 29. Oktober)

Eine kleine geladene Kugel K_1 (Ladung $Q_1 = 1{,}5\,\mu\text{C}$, Masse $m = 3\,\text{g}$) hängt an einem masselosen, nichtleitenden Faden der Länge $l = 3{,}0\text{m}$. Eine zweite, gleichnamig geladene Kugel K_2 (Ladung $Q_2 = 5{,}1\mu\text{C}$) wird nun so an K_1 herangeführt, dass die beiden Kugeln und der Aufhängepunkt A des Fadens ein rechtwinkliges Dreieck bilden (s. Bild).



Für die Fallbeschleunigung wird der Wert $g = 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$ angenommen.

Berechne den Abstand x der beiden Kugeln in Metern, gerundet auf zwei Nachkommastellen!

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

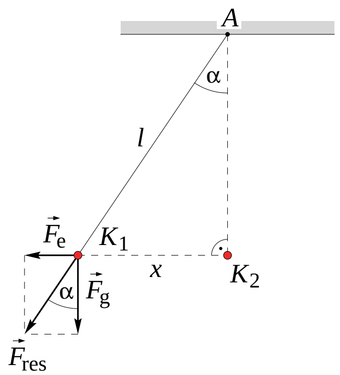
Lösung:
Es wirken zwei Kräfte auf die Kugel K_1: die Gewichtskraft vom Betrag

$$F_\mathrm{g} = mg \tag{1}$$

und die abstoßende COULOMB-Kraft vom Betrag

$$F_\mathrm{e} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q_1 Q_2}{x^2}. \tag{2}$$

Erstere ist konstant und nach unten gerichtet, während sich die zweite so einstellt (sie hängt ja vom Abstand der beiden Ladungen ab), dass ihre Resultierende $\boldsymbol{F}_\mathrm{res} = \boldsymbol{F}_\mathrm{g} + \boldsymbol{F}_\mathrm{e}$ genau in Richtung des Fadens zeigt, s. Bild unten. (Anderenfalls, wenn der Winkel zwischen Faden und $\boldsymbol{F}_\mathrm{res}$ nicht $0°$ oder $180°$ beträgt, gäbe es ein Drehmoment, das für eine nachfolgende Ausrichtung beider entlang einer Geraden sorgt.)



Der Auslenkungswinkel α des Fadens aus der Vertikalen berechnet sich im Kräfterechteck aus F_e und F_g mit (1) und (2) zu:

$$\tan\alpha = \frac{F_\mathrm{e}}{F_\mathrm{g}} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\, mg}\cdot\frac{1}{x^2}, \tag{3}$$

und im rechtwinkligen Dreieck AK_1K_2 zu

$$\sin\alpha = \frac{x}{l}. \tag{4}$$

Die sog. *Kleinwinkelnäherung* $\sin\alpha \approx \tan\alpha$ ($\approx \alpha$) für kleine Winkel α kann hier nicht von vornherein angewendet werden, weil noch nicht bekannt ist, ob α tatsächlich ein kleiner Winkel ist. Deshalb müssen Sinus und Tangens zunächst ineinander überführt werden, wobei (4) benutzt wird:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\frac{x}{l}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}}} = \frac{x}{\sqrt{l^2-x^2}}. \tag{5}$$

Gleichung (3) mit (5) gleichgesetzt, ergibt mit den gegebenen Zahlenwerten

$$\frac{x^3}{\sqrt{l^2-x^2}} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\, mg} = k = 2{,}33626\ \mathrm{m}^2. \tag{6}$$

Gleichung (6) hat es nun in sich: Nach Quadrieren und Ordnen der Terme entsteht die Gleichung

$$x^6 + k^2x^2 - k^2l^2 = 0, \tag{7}$$

deren Grad sich durch die Substitution $y = x^2$ von sechs auf drei erniedrigen lässt:

$$y^3 + k^2 y - k^2 l^2 = 0. \tag{8}$$

Gleichung (8) ist immerhin noch eine kubische Gleichung in y, allerdings schon in reduzierter Form, in der der quadratische Term y^2 nicht mehr auftritt.

Jetzt führen zwei Wege zum Ziel:

a) Entweder wird die CARDANISCHE Formel

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \tag{9}$$

benutzt, mit deren Hilfe die einzige reelle Lösung der kubischen Gleichung $y^3 + py + q = 0$ berechnet werden kann. Mit $p = k^2$ und $q = -k^2 l^2$ ergibt sich hier das numerische Ergebnis

$$y = 3{,}16904 \text{ m}^2 \qquad \text{bzw.} \qquad x = \sqrt{y} = 1{,}7802 \text{ m}. \tag{10}$$

(Dabei muss darauf geachtet werden, dass genügend Nachkommastellen bei den Zwischenergebnissen mitgenommen werden, sonst droht Stellenauslöschung bei den auftretenden Differenzen, und das Ergebnis wird ungenau.)

b) Oder es wird ein Näherungsverfahren angewendet, etwa das NEWTON-RAPHSON-Verfahren:

$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{mit (8)} \quad f(y) = y^3 + k^2 y - k^2 l^2 = 0. \tag{11}$$

Startet man hier mit $y_0 = 2{,}00000 \text{ m}^2$ (geschätzt), folgt daraus weiter $y_1 = 4{,}10447 \text{ m}^2$, $y_2 = 3{,}38180 \text{ m}^2$, $y_3 = 3{,}18335 \text{ m}^2$, $y_4 = 3{,}16911 \text{ m}^2$, $y_5 = 3{,}16904 \text{ m}^2$ .... Die Folge konvergiert somit recht schnell gegen $y = 3{,}16904 \text{ m}^2$ bzw. $x = \sqrt{y} = 1{,}78018$ m, in Übereinstimmung mit dem obigen Ergebnis (10).

Nach (4) ergibt sich daraus ein Auslenkungswinkel von

$$\alpha = 36{,}4\,^\circ, \tag{12}$$

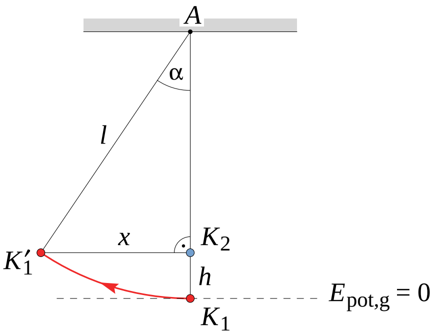
der tatsächlich zu groß für die o. g. Kleinwinkelnäherung ist.

Die gesuchte Entfernung beträgt also

$$x = \mathbf{1{,}78 \text{ m}}. \tag{13}$$

Alternativer Lösungsansatz durch Energiebetrachtungen:

Da nur konservative Kräfte im Spiel sind, sollte auch der Energiesatz zur Lösung führen. Wir betrachten im nachfolgenden Bild die Ladung K_1, die sich zu Beginn genau unter K_2 in der Entfernung $h = l - \sqrt{l^2 - x^2}$ zu ihr befindet. Die potenzielle Energie im Erdschwerefeld $E_{\text{pot,g}}$ sei dort gleich null.



Nun wird sie entlang eines Kreisbogens in die Position K_1' überführt (im Bild rot markiert). Der genaue Weg spielt hierbei keine Rolle, da sowohl die Gravitationskraft als auch die COULOMB-Kraft konservativ und Verschiebungsarbeiten damit wegunabhängig sind, also nur vom Anfangs- und Endpunkt der Verschiebung abhängen. Die potenzielle Energie im elektrostatischen Feld in der Anfangs- bzw. Endposition ist nun

$$E_{\text{pot,e}} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{h} \quad \text{bzw.} \quad E'_{\text{pot,e}} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{x}, \tag{14}$$

sodass die Energie

$$\Delta E_{\text{pot,e}} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{x} \right) \tag{15}$$

frei wird. Diese wird gebraucht, um die Masse m um die Höhe h im Gravitationsfeld anzuheben:

$$\Delta E_{\text{pot,g}} = mgh. \tag{16}$$

Leider führt jetzt der Ansatz $\Delta E_{\text{pot,e}} = \Delta E_{\text{pot,g}}$, ohne dies näher auszuführen, nicht zum gewünschtren Ergebnis. Hat jemand eine Idee, was hieran falsch ist? Danke für eine evtl. spätere E-Mail!

Bemerkungen:

1. Teilnehmer:innen fanden die elementare Herleitung der CARDANISCHEN Formel unter

`https://de.wikipedia.org/wiki/Cardanische_Formeln#Die_cardanische_Formel`,

die auf dem Satz von VIETA beruht.

2. Ein Teilnehmer oder eine Teilnehmerin schrieb, nachdem er oder sie Gleichung (7) richtig hergeleitet hatte: *„OK, ich gebe auf: Wolfram alpha sagt: $x \approx 1{,}78\,\text{m}$“.* – Nun haben wir in der Aufgabenstellung nicht explizit die Verwendung derartiger Tools verboten. Deshalb drängt sich für uns, die eure Einsendungen gerecht bewerten wollen, die Frage auf: „Kann eine solche Lösung genauso viel *wert* sein wie einer der beiden oben unter a) und b) geschilderten Wege (über die CARDANISCHE Formel bzw. über ein erklärtes numerisches Näherungsverfahren)? Sollten wir in einem solchen Fall Teilpunkte abziehen? Dies wäre fair gegenüber denjenigen Teilnehmer:innen, die ohne Benutzung von Computerprogrammen oder Grafik-Taschenrechnern zur richtigen Lösung gelangt sind, also z. B. a) oder b) oder beides oben in ihrer Lösung angeführt haben, was durchaus vorkam.

Wir entscheiden uns in diesem Jahr noch gegen einen Punkteabzug. Im kommenden Jahr werden wir uns genauere Regeln für derartige Fälle überlegen müssen, die dann in den jeweiligen Aufgabenstellungen genau angegeben werden müssen.

Punktverteilung:

- 0,2 Punkte für (1) und (2)
- 0,3 Punkte für (3) und (4)
- 0,5 Punkte für den Rest bis zum Ergebnis (12), anteilig weniger, wenn Schritte fehlen
- 0,7 Punkte für eine Lösung, die (6) oder (7) richtig herleitet und dort abbricht
- 0,7 Punkte für eine Lösung, die (6) oder (7) richtig herleitet und mit der Kleinwinkelnäherung weiterrechnet
- 0,9 Punkte für einen errechneten Abstand x bei richtiger Herleitung, der nicht genau 1,78 m beträgt (oft, weil zuvor zu stark gerundet wurde)