Physik-Marathon 2023

– Aufgabe 18/20 –

(09. Oktober – 15. Oktober)

Ein Stahlblech mit konstanter Dicke und homogener Massenverteilung wird so zugeschnitten, dass seine Fläche in der x, y-Ebene durch die Ungleichungen

$$|x| \leq y \leq |x| + a \qquad \text{und} \qquad y \leq b,$$

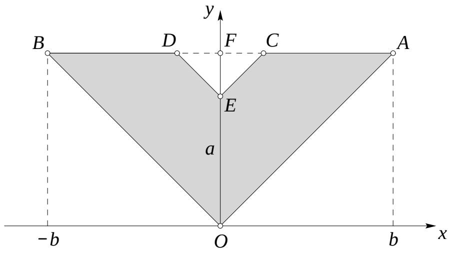
begrenzt wird, wobei a und b feste Abmaße mit $b > a > 0$ sind.

Berechne die Koordinaten $(x_\mathrm{S}, y_\mathrm{S})$ des Schwerpunktes des Bleches!

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung:

Wir betrachten das Problem hier rein mathematisch als Berechnung des Schwerpunkts eines ebenen Gebietes in der x, y-Ebene. Die Dicke des Bleches, seine (konstante) Dichte und damit auch seine Masse spielen bei dieser Betrachtung keine Rolle. Die Fläche des Bleches ist im folgenden Bild zu sehen:



Dass dies tatsächlich so aussieht, lässt sich wie folgt überlegen: Die Bedingung $y \leq b$ schneidet aus dem zunächst „unendlich großen“ Blech alles oberhalb der Geraden $y = b$ weg. In der Bedingung $|x| \leq y$ stellt die Funktion $y = |x|$ die beiden Winkelhalbierenden des 1. und 2. Quadranten dar, und die Ungleichung hat zur Folge, dass alles unterhalb der Geraden OA und OB weggeschnitten wird. Es bleibt jetzt nur noch das Dreieck ABO übrig (dass z. B. keine Punkte mit $y < 0$ mehr dazugehören, ist an $0 \leq |x| \leq y$, also $y \geq 0$ ersichtlich). Schließlich stellt die Funktion $y = |x| + a$ die oben erwähnten Winkelhalbierenden, nur um die Länge a nach oben verschoben dar. Da das „$\leq$“-Zeichen in der Bedingung $y \leq |x| + a$ jetzt zum y zeigt, wird dadurch alles oberhalb der Geraden EC und ED weggeschnitten.

Es handelt sich also bei der Fläche des Bleches um ein großes rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ABO, aus dem ein kleineres, diesem ähnliches Dreieck CDE herausgeschnitten ist. Der Schwerpunkt S von $\triangle ABO$ berechnet sich als arithmetisches Mittel der Koordinaten seiner Eckpunkte, also zu

$$S\left(\frac{b-b+0}{3}, \frac{b+b+0}{3}\right) = S\left(0, \frac{2}{3}b\right), \tag{1}$$

ebenso der Schwerpunkt T von $\triangle CDE$ zu

$$T\left(\frac{(b-a)+(a-b)+0}{3}, \frac{b+b+a}{3}\right) = T\left(0, \frac{1}{3}(a+2b)\right). \tag{2}$$

Weiterhin betragen die Flächeninhalte $[ABO] = b^2$, $[CDE] = (b-a)^2$ und $[OACEDB] = [ABO] - [CDE] = a(2b-a)$, wobei $[XY \ldots Z]$ hier den Flächeninhalt des Polygons $XY \ldots Z$ bezeichnet.

Dann berechnen sich die Schwerpunktkoordinaten (x_S, y_S) des Gebietes als *gewichtetes Mittel* der Schwerpunktkoordinaten der obigen Dreiecke (mit den jeweiligen Flächeninhalten als Gewichte):

$$a(2b-a) \cdot x_S = b^2 \cdot 0 - (b-a)^2 \cdot 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{x_S = 0} \tag{3}$$

$$a(2b-a) \cdot y_S = b^2 \cdot \frac{2b}{3} - (b-a)^2 \cdot \frac{a+2b}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{y_S = \frac{3b^2 - a^2}{3(2b-a)}}. \tag{4}$$

Üblicherweise werden Schwerpunktkoordinaten über Gebiets- oder Flächenintegrale berechnet. Dem Gebiet „ist schon anzusehen“ (aus Symmetriegründen), dass die x-Koordinate x_S seines Schwerpunkts null beträgt, also (3) gilt. Für die y-Koordinate gilt nun

$$y_S = \frac{\int_{(G)} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_{(G)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \frac{\int_{(ABO)} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{(CDE)} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_{(ABO)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{(CDE)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}. \tag{5}$$

Das Gebiet (G) ist hier die (Mengen-)differenz aller Punkte aus dem Dreieck ABO und dem Dreieck CDE; es ist symmetrisch zur y-Achse. Es genügt deshalb, y_S vom rechten Trapez $ACEO$ auszurechnen. Die Nenner in den obigen Brüchen sind die Flächeninhalte der entsprechenden Dreiecke, die selbstverständlich einfacher als durch Integration ermittelt werden können, s. oben. Konkret ergibt sich hier:

$$
\begin{aligned}
y_S &= \frac{\int_{(AFO)} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{(CFE)} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_{(AFO)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{(CFE)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \frac{\int_{(AFO)} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_{(CFE)} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}(b-a)^2} \\
&= \frac{\int_0^b \left[\int_0^y \mathrm{d}x\right] y \,\mathrm{d}y - \int_a^b \left[\int_0^{y-a} \mathrm{d}x\right] y \,\mathrm{d}y}{\frac{1}{2}a(2b-a)} = \frac{\int_0^b y^2 \,\mathrm{d}y - \int_a^b (y-a)y \,\mathrm{d}y}{\frac{1}{2}a(2b-a)} \\
&= \frac{\frac{1}{3}b^3 - \left[\frac{1}{3}(b^3-a^3) - \frac{1}{2}a(b^2-a^2)\right]}{\frac{1}{2}a(2b-a)} = \frac{\frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{6}a^3}{\frac{1}{2}a(2b-a)} = \frac{\frac{1}{6}a(3b^2-a^2)}{\frac{1}{2}a(2b-a)} \\
&= \boldsymbol{\frac{3b^2-a^2}{3(2b-a)}}.
\end{aligned}
$$

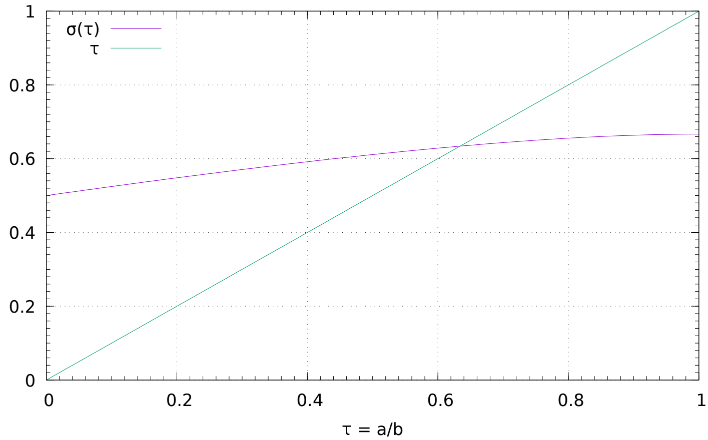
Bemerkungen:

1. Erst später fiel auf, dass man die Aufgabenstellung noch hätte erweitern können um folgende Fragestellung: „Wie groß muss das Verhältnis $\frac{a}{b}$ minimal sein, damit der Schwerpunkt noch innerhalb des Körpers liegt?“

Schauen wir uns das genauer an. Gleichung (4) durch b gekürzt, liefert

$$
\sigma := \frac{y_S}{b} = \frac{3-\tau^2}{6-3\tau} \tag{6}
$$

mit $\tau = \frac{a}{b}$. Die Funktion $\sigma(\tau)$ ist im folgenden Bild zu sehen.



Hier gibt die grüne Kurve die Lage der „V“-förmigen Innenkerbe und die violette Kurve die Lage des Schwerpunktes auf der y-Achse an. Solange (von rechts kommend) die grüne Kurve oberhalb der violetten Kurve liegt, also $\tau > \sigma(\tau)$ gilt, liegt der Schwerpunkt noch im Innern des Körpers, danach außerhalb. Den Grenzfall ermitteln wir durch Lösen der (quadratischen) Gleichung $\sigma(\hat{\tau}) = \hat{\tau}$, die wegen $\tau \leq 1$ nur die Lösung $\hat{\tau} = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}634$ hat.

Für $\tau > \hat{\tau}$ liegt somit der Schwerpunkt innerhalb des Körpers. Wird ein Blech so an der Stelle y_S auf einer Nadelspitze balanciert, sodass der Schwerpunkt (in z-Richtung) ein wenig unterhalb der Nadelspitze liegt, stellt sich ein stabiles Gleichgewicht ein, das die Richtigkeit der obigen Lösung eindrucksvoll demonstriert. Wir zeigen euch diesen Versuch zur Siegerehrung, nachgebaut an einem Modell mit $\tau = 0{,}7$.

2. Die richtige Bestimmung der Form des Bleches ist sicher eine notwendige Bedingung für die korrekte Berechnung des Schwerpunktes. Deshalb kann es keine Teilpunkte für diese Aufgabe geben, wenn die „V-Form“ im Bild oben nicht erkannt wurde.

Punktverteilung:

- 0,0 Punkte, wenn die Form des Bleches nicht korrekt bestimmt wurde
- 0,3 Punkte, wenn $x_{\mathrm{S}} = 0$ berechnet oder nur plausibel gemacht wurde
- 0,7 Punkte, wenn die y-Koordinate (4) richtig berechnet wurde