Physik-Marathon 2023

– Aufgabe 17/20 –

(02. Oktober – 08. Oktober)

Mit einem Feuerwehrschlauch, dessen Ende sich im Punkt $(0, 0)$ befindet, soll auf einen Brandherd gezielt werden, der die Koordinaten $(x, y) = (w, h)$ hat (Weite $w > 0$, Höhe $h > 0$). Der Wasserstrahl ist unendlich dünn und hat die Austrittsgeschwindigkeit v_0. Luftreibung und andere Kräfte (außer der Erdanziehungskraft) werden vernachlässigt.

a) Leite eine Gleichung für den Betrag der Mindestgeschwindigkeit $v_{0,\mathrm{min}}$ des Wassers im Schlauchende in Abhängigkeit von den Entfernungen w und h her, mit der der Brandherd gerade noch getroffen werden kann!

b) Leite für den in a) genannten Grenzfall eine Gleichung für den (Abwurf-)Winkel α_0 in Abhängigkeit von w und h her! α_0 ist hier derjenige Winkel, den die Mindestaustrittsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{0,\mathrm{min}}$ mit der x-Richtung einschließt.

Beide Gleichungen dürfen nur die Parameter w, h und ggf. die Fallbeschleunigung g sowie mathematische Konstanten enthalten.

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung:

a) Die Gleichungen für den schiefen Wurf eines Wassertropfens lauten hier:

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha, \qquad y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{g}{2}t^2, \tag{1}$$

wobei α der Abwurfwinkel gegenüber der x-Achse ist. Da der Zielpunkt $T(w,h)$ auf der Wurfparabel liegt, gilt:

$$w = v_0 t \cos\alpha, \qquad h = v_0 t \sin\alpha - \frac{g}{2}t^2. \tag{2}$$

Als Abkürzung wird im Folgenden $d = \sqrt{w^2+h^2}$ (das ist die geradlinige Entfernung vom Ende des Schlauchs bis zum Ziel) benutzt. Der Abwurfwinkel α spielt in Teilaufgabe a) keine Rolle, weshalb die Gleichungen (2) so zusammengefasst werden können, dass α darin nicht mehr vorkommt (der Trick dabei ist die Ausnutzung des *trigonometrischen Pythagoras*):

$$\begin{aligned}
& \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \\
\Longrightarrow\quad & \frac{w^2}{v_0^2 t^2} + \frac{\left(h+\frac{g}{2}t^2\right)^2}{v_0^2 t^2} = 1 \\
\Longrightarrow\quad & w^2 + \left(h+\frac{g}{2}t^2\right)^2 = v_0^2 t^2 \\
\Longrightarrow\quad & \frac{g^2}{4}t^4 + (gh - v_0^2)t^2 + d^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Gleichung (3) ist eine biquadratische Gleichung in t (bzw. eine quadratische Gleichung in t^2), für deren Diskriminante

$$D = (gh - v_0^2)^2 - g^2 d^2 \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad |v_0^2 - gh| \geq gd \tag{4}$$

gelten muss, damit reelle Lösungen für t^2 (und damit auch für t) existieren. Aus (4) folgt nun:

$$v_0 \geq \sqrt{gd + gh} = \sqrt{g}\,\sqrt{d+h}. \tag{5}$$

Damit beträgt die gesuchte Mindestgeschwindigkeit

$$v_{0,\min} = \boldsymbol{\sqrt{g}\cdot\sqrt{\sqrt{w^2+h^2}+h} = \sqrt{g\sqrt{w^2+h^2}+gh}}. \tag{6}$$

Durch eine geschickte Anwendung der 3. binomischen Formel

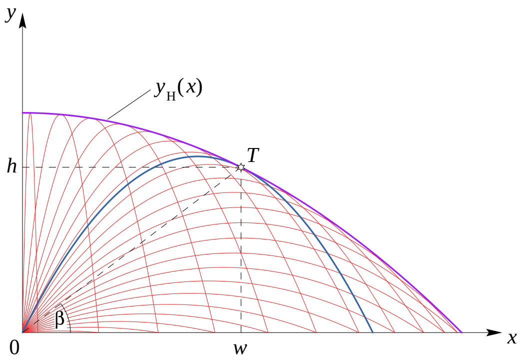
$$\sqrt{w^2+h^2}+h = \frac{w^2}{\sqrt{w^2+h^2}-h} \tag{7}$$

erhält man nach einigen algebraischen Umformungen folgende zu (6) äquivalente Darstellung:

$$\begin{aligned}
v_{0,\min} &= \sqrt{g}\cdot\sqrt{\sqrt{w^2+h^2}+h} = \sqrt{g}\sqrt{\frac{w^2\left(\sqrt{w^2+h^2}+h\right)}{w^2+h^2-h^2}} \\
&= \sqrt{g}\sqrt{\frac{w^2(\sqrt{w^2+h^2}+h)}{\left(\sqrt{w^2+h^2}-h\right)\left(\sqrt{w^2+h^2}+h\right)}} \\
&= \boldsymbol{\sqrt{g}\,\frac{w}{\sqrt{\sqrt{w^2+h^2}-h}} = w\sqrt{\frac{g}{\sqrt{w^2+h^2}-h}}}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Das Auftreten einer verschachtelten Doppelwurzel in (6) oder (8) ist somit eine charakteristische Eigenschaft der Lösung dieser Aufgabe.

Das nachfolgende Bild zeigt Bahnkurven des Wasserstrahls, die für konstantes $v_{0,\mathrm{min}}$ bei Abwurfwinkeln $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ möglich sind.



Hier wird der Zielpunkt $T(w,h)$ gerade eben erreicht (blaue Kurve). Zur *Hüllkurve* $y_{\mathrm{H}}(x)$ (violette Kurve) siehe unten.

b) Zur Berechnung des zu $v_{0,\mathrm{min}}$ gehörigen Abwurfwinkels α_0 wird die Bahnkurve

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha \tag{9}$$

bzw. speziell mit $x = w$ und $y = h$

$$-\frac{gw^2}{2v_{0,\mathrm{min}}^2\cos^2\alpha_0} + w\tan\alpha_0 = h \tag{10}$$

herangezogen. (Man erhält dabei (9), indem $t = \frac{x}{v_0\cos\alpha_0}$ aus der Gleichung (1, links) in die Gleichung (1, rechts) für t eingesetzt wird, d. h., die Zeit t eliminiert wird.) Mit der bekannten Beziehung

$$\frac{1}{\cos^2\alpha_0} = \frac{\cos^2\alpha_0 + \sin^2\alpha_0}{\cos^2\alpha_0} = 1 + \tan^2\alpha_0 \tag{11}$$

geht (10) über in

$$-\frac{gw^2}{2v_{0,\mathrm{min}}^2}\tan^2\alpha_0 + w\tan\alpha_0 - \left(\frac{gw^2}{2v_{0,\mathrm{min}}^2} + h\right) = 0, \tag{12}$$

welche eine quadratische Funktion in $\tan\alpha_0$ ist. Allgemein liegt der Scheitelpunkt der Parabel $ax^2 + bx + c$ bei $x = -\frac{b}{2a}$, in unserem Fall somit bei

$$\tan\alpha_0 = -\frac{w}{-2\left(\frac{gw^2}{2v_{0,\mathrm{min}}^2}\right)} = \frac{v_{0,\mathrm{min}}^2}{gw} = \begin{cases} \dfrac{w}{\sqrt{w^2+h^2}-h} & \text{(mit (8))} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{w^2+h^2}+h}{w} & \text{(mit (6))} \end{cases} \tag{13}$$

Damit lautet die Antwort auf Teilaufgabe b):

$$\alpha_0 = \mathbf{arctan}\left(\frac{\boldsymbol{w}}{\sqrt{\boldsymbol{w}^2+\boldsymbol{h}^2}-\boldsymbol{h}}\right) \tag{14}$$

$$= \mathbf{arctan}\left(\frac{\sqrt{\boldsymbol{w}^2+\boldsymbol{h}^2}+\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{w}}\right) = \mathbf{arctan}\left(\sqrt{\mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{h}^2}{\boldsymbol{w}^2}}+\frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{w}}\right). \tag{15}$$

Alternative Lösung zu a):

Die vorherige Lösung zu a) beruhte auf der Elimination des Abwurfwinkels α aus den beiden Gleichungen (2). Man kann aber ebenso die Zeit t eliminieren, welches – analog zu (9) – auf die Bahnkurve

$$y(x,\alpha) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha \cdot x \tag{16}$$

und mit $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$, $x = w$ und $y = h$ auf

$$-\frac{gw^2}{2v_0^2}\tan^2\alpha + w\tan\alpha - \left(\frac{gw^2}{2v_0^2} + h\right) = 0 \tag{17}$$

führt, die – analog zu (12) – eine quadratische Gleichung in $\tan\alpha$ ist. Dieselbe Argumentation wie oben liefert hier die Diskrimante

$$D = w^2 - 4\frac{gw^2}{2v_0^2}\left(\frac{gw^2}{2v_0^2} + h\right) \geq 0 \tag{18}$$

$$\Longrightarrow \quad 1 \geq \frac{g^2w^2}{v_0^4} + \frac{2gh}{v_0^2} \quad \Longrightarrow \quad v_0^4 \geq g^2w^2 + 2ghv_0^2 \quad \Longrightarrow \quad v_0^4 - 2ghv_0^2 \geq g^2w^2$$

$$\Longrightarrow \quad v_0^4 - 2ghv_0^2 + g^2h^2 \geq g^2(w^2+h^2) = g^2d^2 \quad \Longrightarrow \quad (v_0^2 - gh)^2 \geq g^2d^2, \tag{19}$$

also wieder (4).

Weitere alternative Lösung:

a) Nachfolgend eine originelle Lösung von einem Teilnehmenden, die sich vorrangig an den Geschwindigkeitskomponenten orientiert und nicht an der Wurfparabel:

Ist (v_{0x}, v_{0y}) die Austrittsgeschwindigkeit des Wassers und t der Zeitpunkt, zu dem der Brandherd (w,h) getroffen wird, so gilt

$$w = v_{0x}t \qquad \text{und} \qquad h = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2. \tag{20}$$

Umstellen der zweiten Gleichung nach v_{0y} von Einsetzen von $t = \frac{w}{v_{0x}}$ aus der ersten Gleichung ergibt

$$v_{0y} = \frac{h}{w}v_{0x} + \frac{\frac{gw}{2}}{v_{0x}}. \tag{21}$$

Daraus ergibt sich

$$v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = \left(1 + \frac{h^2}{w^2}\right)v_{0x}^2 + \frac{\frac{g^2w^2}{4}}{v_{0x}^2} + gh. \tag{22}$$

Da $f(x) = ax + \frac{b}{x} + c$ für $a, b > 0$ auf dem Intervall $(0,\infty)$ das Minimum $f_{\min} = 2\sqrt{ab} + c$ bei $x_{\min} = \sqrt{\frac{b}{a}}$ annimmt ($f'(x) = a - \frac{b}{x^2}$ hat in $(0,\infty)$ nur die Nullstelle $x_{\min}$, und $f''(x_{\min}) = \frac{2b}{x_{\min}^3} > 0$), folgt mit $a = 1 + \frac{h^2}{w^2}$, $b = \frac{g^2w^2}{4}$ und $c = gh$, dass der minimale Wert von v_0 gegeben ist durch

$$v_{0,\min} = \sqrt{2\sqrt{ab} + c} = \sqrt{g\left(\sqrt{w^2+h^2} + h\right)} \tag{23}$$

(in Übereinstimmung mit (6)) und angenommen wird bei

$$v_{0x,\min}^2 = \frac{gw^2}{2\sqrt{w^2+h^2}} \qquad \left(\text{und} \quad v_{0y,\min}^2 = \frac{g\left(\sqrt{w^2+h^2}+h\right)^2}{2\sqrt{w^2+h^2}}\right). \tag{24}$$

b) Für den Winkel α zwischen der Austrittsgeschwindigkeit und der x-Richtung gilt mit (21)

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right) = \arctan\left(\frac{h}{w} + \frac{gw}{2v_{0x}^2}\right). \tag{25}$$

Für den gesuchten Winkel α_0 der Minimalaustrittsgeschwindigkeit mit der x-Richtung folgt mit (24) schließlich

$$\alpha_0 = \arctan\left(\frac{h}{w} + \frac{gw}{2v_{0x,\min}^2}\right) = \arctan\left(\frac{h}{w} + \frac{gw2\sqrt{w^2+h^2}}{2gw^2}\right) = \arctan\left(\frac{h+\sqrt{w^2+h^2}}{w}\right), \tag{26}$$

in Übereinstimmung mit (15).

Berechnung der Hüllkurve $y_\mathrm{H}(x)$ (hier optional!):

Im obigen Bild ist die sog. *Einhüllende* aller Wurfparabeln oder *Hüllkurve* in violetter Farbe eingezeichnet. Wir leiten ihre Gleichung wie folgt her: Die Ordinate $y_\mathrm{H}(x)$ im Abstand x vom Koordinatenursprung ist gleich dem Maximalwert der Ordinaten aller Wurfparabeln (12) als Funktion von α an der Stelle x. Eine notwendige Bedingung für das Maximum ergibt sich somit aus $\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial \alpha} = 0$. Parametrisiert man $y(x,\alpha)$ anstelle von α mit dem Parameter $C = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$, also nach Substitution in (12)

$$y(x,C) = -\frac{g}{2v_0^2}Cx^2 + \sqrt{C-1}\cdot x, \tag{27}$$

so erhält man

$$\frac{\partial y(x,C)}{\partial C} = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{C-1}} = 0 \tag{28}$$

mit der Lösung $C = 1 + \frac{v_0^4}{g^2x^2}$. Dies eingesetzt in (16) ergibt die Hüllkurve

$$y_\mathrm{H}(x) = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g}. \tag{29}$$

Die Gleichung der Hüllkurve ist also ebenfalls eine Wurfparabel. Sie entspricht einem horizontalen Wurf mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 aus der Höhe $\frac{v_0^2}{2g}$ und tangiert jede Wurfparabel bei

$$x = \frac{v_0^2}{g\sqrt{C-1}} = \frac{v_0^2}{g\tan\alpha}. \tag{30}$$

Letzteres folgt mit (17) allgemein aus

$$\frac{\mathrm{d}y_\mathrm{H}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y(x,C(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial y(x,C)}{\partial x} + \frac{\partial y(x,C)}{\partial C}\cdot\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{31}$$

(gleiche Anstiege von Hüllkurve und Wurfparabel im Berührungspunkt).

Übrigens kann man bei Kenntnis der Hüllkurve (29) die Aufgabe a) auch wie folgt lösen:
Liegt ein Punkt $(x,y) = (w,h)$ gerade auf der Hüllkurve, so bedeutet das, dass dieser Punkt mit einer bestimmten konstanten Anfangsgeschwindigkeit v_0 gerade so erreicht werden kann (s. Bild vorn). Läge er unterhalb der Hüllkurve, wäre die Anfangsgeschwindigkeit nicht minimal, weil noch „weiter weg“ liegende Punkte erreichbar wären; läge er oberhalb der Hüllkurve, wäre er offensichtlich nicht mehr erreichbar. Also sind alle Punkte auf der Hüllkurve diejenigen Punkte, die (bei veränderlichem Abwurfwinkel) mit einer minimalen Anfangsgeschwindigkeit gerade noch so getroffen werden können.

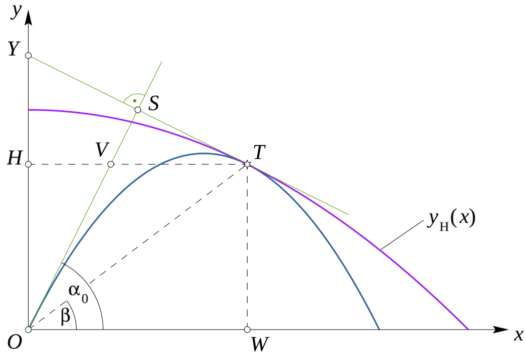
Wird somit in (29) $(x,y) = (w,h)$ substituiert, ergibt sich $h = -\frac{g^2w^2}{2v_{0,\min}^2} + \frac{v_{0,\min}^2}{2g}$ bzw. die biquadratische Gleichung in $v_{0,\min}$:

$$v_{0,min}^4 - 2ghv_{0,min}^2 - g^2w^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v_{0,\min}^2 = gh + \sqrt{g^2h^2 + g^2w^2}, \tag{32}$$

welche als Lösung wiederum auf Gleichung (6) führt.

Weitere bemerkenswerte Eigenschaften:

Betrachten wir die Wurfparabel in unserem Brandherd T bei minimaler Abwurfgeschwindigkeit sowie die Abwurfrichtung (vermittelt über den Vektor $\boldsymbol{v}_0$, grüne Gerade durch den Ursprung) und die momentane Bahngeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_\mathrm{t}$ (grüne Gerade durch T), so fällt auf, dass beide Vektoren senkrecht aufeinander stehen (s. folgendes Bild).



Diese Eigenschaft lässt sich bei Kenntnis der Hüllkurve wie folgt einfach rechnerisch begründen. Die Bahngeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_\mathrm{t}$ ist stets tangential an die Wurfparabel gerichtet, und in unserem optimalen Fall auch an die Hüllkurve, s. oben. Ihr Anstieg ist nach (29) im Punkt (w, h)

$$\left.\frac{\mathrm{d}y_\mathrm{H}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=w} = -\frac{gw}{v_{0,\mathrm{min}}^2}. \tag{33}$$

Betrachten wir die Tangente an die Wurfparabel im Abwurfpunkt, also die Trägergerade von $\boldsymbol{v}_0$, so hat sie den Anstieg

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \tan\alpha_0 = \frac{\sqrt{w^2+h^2}+h}{w}. \tag{34}$$

Das Produkt beider Anstiege ist also mit (6)

$$-\frac{gw}{v_{0,\mathrm{min}}^2}\cdot\frac{\sqrt{w^2+h^2}}{w} = -\frac{g(\sqrt{w^2+h^2}+h)}{v_{0,\mathrm{min}}^2} = -1, \tag{35}$$

beide Geraden stehen tatsächlich senkrecht aufeinander: $\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{t} = 0$.

Doch nicht genug damit. Sei $\beta = \arctan(\frac{h}{w})$ derjenige Winkel, unter dem der Brandherd vom Austrittsort O des Wasser geradlinig erscheint, siehe obige Bilder. Dann sind die Dreiecke YSO und YHT rechtwinklig, und da sie den Winkel $\angle HYS = \angle OYT$ gemeinsam haben, gilt

$$\angle YOS = 90^\circ - \alpha_0 = \angle YTH. \tag{36}$$

Hier fehlt noch ein Schritt: zu zeigen, dass $\angle YOS = \angle SOT$ gilt. Wer packt ihn?

Das Dreieck OYT ist also stets gleichschenklig mit $OY = OT$, wobei OS die Winkelhalbierende von $\angle YOT$ ist. Man muss daher mit dem Feuerwehrschlauch immer in Richtung der Winkelhalbierende zwischen direkter Richtung zum Brandherd und der Vertikalen zielen. – Was für ein bemerkenswertes Ergebnis!

Bemerkungen:

1. Es gab sehr viele weitere originelle Aspekte zu dieser Aufgabe von Teilnehmenden, die es aus Zeitgründen nicht mehr in die Musterlösung geschafft haben.

2. Einige Teilnehmer:innen gingen von der Annahme aus, dass der Brandherd (w, h) bei minimaler Anfangsgeschwindigkeit v_0 stets im Scheitelpunkt der Wurfparabel erreicht wird. Das ist nicht richtig, wie auch im Bild oben (blaue Kurve) zu erkennen ist. Das Ziel kann durchaus bereits auf auf dem „absteigenden Ast" der Bahnkurve liegen. – Folgt man obiger Annahme, ergibt die Rechnung als minimale Anfangsgeschwindigkeit

$$\hat{v}_{0,\mathrm{min}} = \sqrt{g} \cdot \sqrt{\frac{w^2 + 4h^2}{2h}}. \tag{37}$$

Verglichen mit (6), findet man hier jedoch, dass tatsächlich $v_{0,\mathrm{min}} < \hat{v}_{0,\mathrm{min}}$ eine bessere Lösung ist:

$$\begin{aligned}
& 0 < w^4 \\
\Longrightarrow \quad & 4w^2h^2 + 4h^4 < w^4 + 4w^2h^2 + 4h^4 \\
\Longrightarrow \quad & 4h^2(w^2 + h^2) < (w^2 + 2h^2)^2 \\
\Longrightarrow \quad & w^2 + h^2 < \left(\frac{w^2 + 2h^2}{2h}\right)^2 \\
\Longrightarrow \quad & \sqrt{w^2 + h^2} < \frac{w^2 + 2h^2}{2h} = \frac{w^2}{2h} + h \\
\Longrightarrow \quad & \sqrt{w^2 + h^2} + h < \frac{w^2}{2h} + 2h = \frac{w^2 + 4h^2}{2h} \\
\Longrightarrow \quad & v_{0,\mathrm{min}} < \hat{v}_{0,\mathrm{min}}.
\end{aligned}$$

Punktverteilung:

- 0,6 Punkte für Teilaufgabe a), wenn (6) oder (8) berechnet wurde (ansonsten anteilig weniger)
- 0,4 Punkte für Teilaufgabe b), wenn (14) oder (15) berechnet wurde (ansonsten anteilig weniger)
- 0,4 Punkte insgesamt, wenn sowohl die Ergebnisse a) und b) noch Winkel, also nicht nur w, h und g enthalten
- 0,3 Punkte insgesamt, wenn fälschlicherweise angenommen wurde, dass der Brandherd im Scheitelpunkt der Wurfparabel liegen muss, also bei a) $\hat{v}_{0,\mathrm{min}}$ erhalten wurde (s. Bemerkung 2)
- 0,2 Punkte insgesamt, wer höchstens bis zur Wurfparabel (16) bzw. (17) kommt
- kein Punktabzug, wenn w und h versehentlich vertauscht wurden