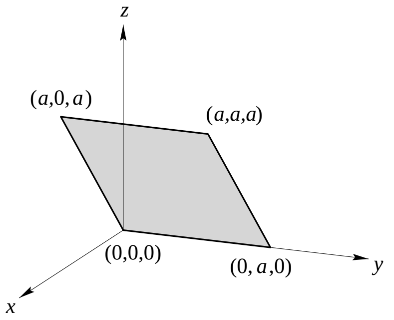
Physik-Marathon 2023

– Aufgabe 16/20 –

(25. September – 01. Oktober)

Gegeben sei ein homogenes elektrisches Feld $\boldsymbol{E} = E_0\,\boldsymbol{i}$ im Vakuum. Dabei ist $\boldsymbol{i}$ der Einheitsvektor in x-Richtung.

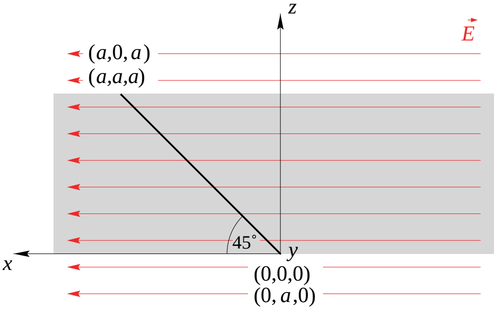
Berechne den elektrischen Fluss $\Psi = \int \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$ durch die abgebildete rechteckige Fläche mit den im Bild ersichtlichen Koordinaten der Eckpunkte!

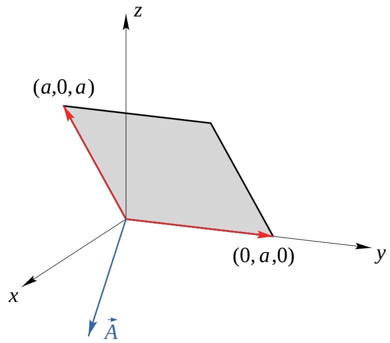


☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung:

Es gibt eine kurze und eine etwas längere Lösung für diese Aufgabe. Bei der kürzeren Lösung wird die Fläche aus Richtung der y-Achse, wie im folgenden linken Bild dargestellt, betrachtet:





Es wird also so auf die rechteckige Fläche geblickt, dass nur eine Kante sichtbar ist, die Feldlinien $\boldsymbol{E}$ verlaufen in x-Richtung (horizontal von rechts nach links). „Fluss durch eine Fläche" ist ein Maß dafür, wie viele Feldlinien die Fläche passieren (im Bild ist dieser Bereich grau dargestellt). Da die Flächennormale aber um $45\,^\circ$ gegenüber der x-Richtung geneigt ist (dies ist an den Koordinaten der Eckpunkte erkennbar), verkleinert sich die „sichtbare Fläche" um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ gegenüber dem Flächeninhalt des Rechtecks von $\sqrt{2}a^2$. Also beträgt der elektrische Fluss

$$\Psi = D_0 a^2 = \boldsymbol{\varepsilon_0 E_0 a^2}. \tag{1}$$

Bei der etwas längeren Lösung wird wie folgt gerechnet (s. obiges rechtes Bild): Die Flächennormale $\boldsymbol{A}$ wird mit dem Vektorprodukt aus den Vektoren $(0, a, 0)^\mathsf{T}$ und $(a, 0, a)^\mathsf{T}$,

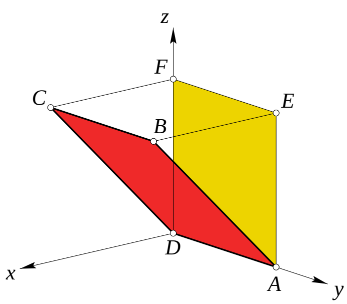
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ 0 \\ -a^2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

ermittelt, wobei die beiden Faktoren die aufspannenden Seitenvektoren des Rechtecks sind (im Bild oben in rot eingezeichnet). Der elektrische Fluss ist dann wie in (1)

$$\Psi = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 \\ 0 \\ -a^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon_0 E_0 a^2}. \tag{3}$$

Alternative Lösung:

Sei ein $ABCDEF$ ein Prisma mit $ABCD$ als gegebener Fläche und $AEFD$ als gegenüberliegender Seitenfläche (s. Bild):



Dann ist der elektrische Fluss durch die drei anderen Seitenflächen $BEFC$, AEB und DFC null, da das $\boldsymbol{E}$-Feld jeweils senkrecht auf den Flächennormalen steht. Nach dem GAUSSschen Integralsatz (1. MAXWELL-Gleichung) ist der elektrische Fluss durch die geschlossene Oberfläche des Prismas gleich der im Prismenvolumen enthaltenen Ladungen. Letztete sind aber nicht vorhanden (Vakuum), also null. Somit muss der Fluss durch das Rechteck $ABCD$ vom gleichen Betrag, aber entgegengesetztem Vorzeichen, des Flusses durch das Quadrat $AEFD$ sein. Es folgt unmittelbar $|\Psi| = \varepsilon_0 E_0 a^2$. – Man spart sich hier die beiden Faktoren $\sqrt{2}$, siehe obige Rechnung.

Bemerkungen:

1. Hier muss zur Berechnung des Integrals $\Psi = \int \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$ nicht tatsächlich integriert werden, da der Integrand $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 E_0\, \boldsymbol{i}$ konstant ist und somit vor das Integral gezogen werden kann. Es bleibt mithin $\Psi = \boldsymbol{D} \cdot \int \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A}$, wonach wie in (3) weitergerechnet wird.

2. Je nachdem, wie der Flächenvektor $\boldsymbol{A}$ orientiert ist (entweder wie in (2) als $(a^2, 0, -a^2)^\mathsf{T}$ mit positiver x-Komponente oder als $(-a^2, 0, a^2)^\mathsf{T}$ in die entgegengesetzte Richtung), erhalten wir entweder $\Psi = \varepsilon_0 E_0 a^2$ oder $\Psi = -\varepsilon_0 E_0 a^2$. Beide Ergebnisse sind hier richtig.

3. Wird ε_r in der Lösung angegeben, ohne zu erwähnen, dass $\varepsilon_\mathrm{r} = 1$ gilt (Vakuum), werden 0,05 Punkte abgezogen.

Punktverteilung:

- 1,0 Punkte, wenn die Antwort $\varepsilon_0 E_0 a^2$ oder $-\varepsilon_0 E_0 a^2$ lautet
- Abzüge, wenn irgendetwas zwischendurch falsch ist (schwer im Vorfeld zu beurteilen)
- 0,1 Punkte Abzug, falls der Faktor ε_0 vergessen wurde
- 0,05 Punkte Abzug, falls ε_r unnötig im Ergebnis auftritt (s. Bemerkung *3*)
- 0,25 Punkte Abzug, falls im Ergebnis noch ein Einheitsvektor auftritt
- 0,25 Punkte Abzug, falls das Ergebnis um einen Faktor $\sqrt{2}$ falsch ist