Physik-Marathon 2023

– Aufgabe 15/20 –

(18. September – 24. September)

Es wird eine stetig, isotrop und gleichmäßig expandierende Kugel vom momentanen Radius R betrachtet, deren Mittelpunkt raumfest an derselben Stelle bleibt und deren in ihrem Inneren enthaltene Masse konstant ist. Die Expansion verlaufe so, dass zu jedem Zeitpunkt die Dichte ϱ im Inneren der Kugel überall gleich ist. Außerdem sei die relative zeitliche Änderung der Dichte $\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t}\right)$ konstant.

Dann ist die Geschwindigkeit v eines Punktes auf der Oberfläche der expandierenden Kugel – von außen betrachtet bzw. relativ zum fixen Mittelpunkt – proportional zu R^{κ}.

Berechne den Exponenten κ!

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung:

Ausgangspunkt der Überlegungen ist die Konstanz der Gesamtmasse der Kugel

$$M = \varrho V = \text{const} \tag{1}$$

während der Expansion. Somit gilt, da sich sowohl die Dichte $\varrho(t)$ als auch das Volumen $V(t)$ zeitlich ändern:

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} V + \varrho \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{2}$$

Das Volumen einer Kugel beträgt $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, die zeitliche Ableitung lautet nach der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi R^2 \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}. \tag{3}$$

Beides in (2) eingesetzt, ergibt

$$\frac{4\pi}{3} R^3 \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} + 4\pi R^2 \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\varrho = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{R}{3} \cdot \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} + \varrho \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{4}$$

Die Geschwindigkeit v eines Punktes auf der Kugeloberfläche ist aber gerade $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$, somit gilt nach (4):

$$v = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{R}{3}\left(-\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t}\right) \sim R \sim R^{\kappa}. \tag{5}$$

($\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ ist nicht etwa negativ, das Minuszeichen gehört zum Term $\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t}$, der seinerseits negativ ist, da die Dichte bei konstanter Masse und sich vergrößerndem Volumen abnehmen muss).

Der gesuchte Exponent beträgt somit nach (5) $\boldsymbol{\kappa = 1}$.

Diese Lösung kommt ohne explizite Berechnung der Funktion $\varrho(t)$ bzw. $R(t)$ aus.

1. alternative Lösung:

Nachfolgend wird die Funktion $R(t)$, also die Zunahme des Radius R mit der Zeit t, explizit berechnet. Dazu wird von der Nebenbedingung

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = -k = \text{const} \tag{6}$$

ausgegangen, wobei die Konstante gleich $-k$ mit $k > 0$ gesetzt wird. Dass die Konstante auf der rechten Seite von (6) negativ sein muss, ergibt sich aus obiger Überlegung, dass bei konstanter Masse und zunehmendem Volumen während der Expansion die Dichte abnehmen muss, also $\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t}$ negativ ist.

Nun ist (6) eine Differenzialgleichung 1. Ordnung für die Funktion $\varrho(t)$, die mit der Methode „Trennung der Veränderlichen" gelöst werden kann:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = -k \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = -k\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho} = -k\int\limits_0^t \mathrm{d}t \tag{7}$$

$$\Longrightarrow \quad \ln \varrho\big|_{\varrho_0}^{\varrho} = \ln\varrho - \ln\varrho_0 = \ln\frac{\varrho}{\varrho_0} = -\, kt\big|_0^t = -kt$$

$$\Longrightarrow \quad \varrho(t) = \varrho_0\,\mathrm{e}^{-kt}. \tag{8}$$

Man beachte, dass die Anfangsbedingung $\varrho(t = 0) = \varrho_0$ (von der zwar in der Aufgabenstellung keine Rede ist, die aber dennoch existiert), über die beiden unteren Integrationsgrenzen in (7) eingeht. Die Dichte nimmt also nach (8) exponentiell mit der Zeit ab.

Von $\varrho(t)$ auf $R(t)$ zu schließen, ist schließlich nicht schwer, denn es gilt mit dem Kugelvolumen $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ und (8)

$$\begin{aligned}
\varrho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi} R^{-3} \quad &\Longrightarrow \quad R^{-3} = \frac{4\pi}{3M}\varrho \\
&\Longrightarrow \quad R(t) = \left(\frac{4\pi}{3M}\right)^{-\frac{1}{3}} \varrho^{-\frac{1}{3}} = \left(\mathrm{const} \cdot \varrho_0^{-\frac{1}{3}}\right) \mathrm{e}^{\frac{k}{3}t} \\
&\Longrightarrow \quad R(t) = \mathrm{const} \cdot \mathrm{e}^{\frac{k}{3}t}. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Der Radius nimmt somit exponentiell mit der Zeit zu. Als letzter Schritt folgt mit (9):

$$v = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \left(\mathrm{const} \cdot \frac{k}{3}\right) \mathrm{e}^{\frac{k}{3}t} = \frac{k}{3} R \sim R^{\kappa} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{\kappa = 1}. \qquad (10)$$

2. alternative Lösung (die wohl kürzeste!):

Es gilt mit $v = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$

$$\begin{aligned}
&\varrho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi} R^{-3} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}R} \cdot \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = -\frac{9M}{4\pi R^4} \cdot v \\
&\frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t} = \frac{4\pi R^3}{3M} \cdot \left(-\frac{9M}{4\pi R^4}\right) \cdot v = -\frac{3}{R} \cdot v = \mathrm{const}. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung in (11) führt unmittelbar auf die Proportionalität zwischen v und R, also gilt $\boldsymbol{\kappa = 1}$. (Zur Vorzeichendiskussion hier siehe oben zu Beginn der 1. alternativen Lösung.)

Bemerkung: Es ist bei dieser Aufgabe sehr schwer, eine abgestufte Punkteverteilung festzulegen, wenn das Ergebnis nicht richtig ist. Was braucht man unbedingt, um zum richtigen $\kappa = 1$ zu gelangen?

$$\varrho = \frac{M}{V}; \qquad (12)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{und} \qquad (13)$$

$$v = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \qquad (14)$$

sind sicher noch einfache Formeln bzw. Erkenntnisse. Außerdem ist wenigstens eine zeitliche Ableitung wie $\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ oder $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ mit einzubeziehen, wofür es mehrere Möglichkeiten gibt, siehe oben. Deshalb folgender Vorschlag zur

Punktverteilung:

- 1,0 Punkte, wenn richtig $\kappa = 1$ gezeigt wurde, falls nicht:
- jeweils 0,1 Punkte, wenn (12), (13) bzw. (14) richtig verwendet werden
- keine weiteren Teilpunkte, wenn keine Ableitung richtig ist (Kettenregel falsch angewendet o. Ä.)
- 0,5 Punkte zusätzlich, wenn $\varrho(t)$ oder $R(t)$ richtig hergeleitet werden