Physik-Marathon 2023

– Aufgabe 14/20 –

(11. September – 17. September)

Ein Körper der Masse 50 mg, der die Ladung 2 nC trägt, befindet sich anfangs in Ruhe. Zur Zeit $t = 0$ beginnt auf die Ladung ein elektrisches Feld

$$\boldsymbol{E}(t) = E_0 \sin(\omega t)\, \boldsymbol{i}$$

zu wirken, wobei $E_0 = 30\,\mathrm{kV \cdot m^{-1}}$, $\omega = 50\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ und $\boldsymbol{i}$ der Einheitsvektor in x-Richtung ist.

Es wird nur der Einfluss der elektrischen Kraft auf den Körper betrachtet.

Berechne dessen maximale Geschwindigkeit zu späteren Zeitpunkten!

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung:

Ein Kräfteansatz nach dem 2. NEWTONschen Axiom

$$ma = F = qE \tag{1}$$

führt auf die momentane Beschleunigung

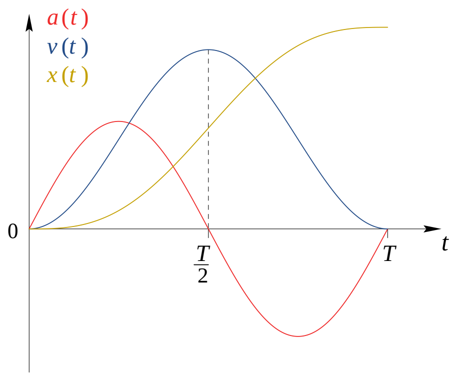
$$a(t) = \frac{q}{m} E(t) = \frac{qE_0}{m} \sin(\omega t), \tag{2}$$

die in x-Richtung wirkt. Die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ kann daraus durch einmalige Integration von $\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$ errechnet werden, wobei die Anfangsbedingung $v(t = 0) = 0$ über die unteren Integrationsgrenzen eingeht:

$$\int_0^v \mathrm{d}v = v(t) = \int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t = \frac{qE_0}{m} \int_0^t \sin(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{qE_0}{m} \left(-\frac{1}{\omega}\cos(\omega t)\right)\Bigg|_0^t = \frac{qE_0}{m\omega}\,(1 - \cos(\omega t))\,. \tag{3}$$

Zur Kontrolle: Für $t = 0$ ist nach (3) die Anfangsgeschwindigkeit tatsächlich null.

Die Zeitverläufe der Beschleunigung $a(t)$ und der Geschwindigkeit $v(t)$ nach (2) und (3) sind für die erste Periode von $a(t)$ in folgendem Bild veranschaulicht (auf die Funktion $x(t)$ wird unten in der Bemerkung *3* eingegangen):



Die maximale Geschwindigkeit wird erreicht, wenn die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit, also $a(t)$, null wird. Dies ist zum ersten Mal nach einer halben Periodendauer zur Zeit

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega} \tag{4}$$

der Fall, bei der $\sin(\omega t) = 0$ bzw. $\cos(\omega t) = -1$ ist. Da der Vorgang periodisch verläuft, wiederholt sich das Erreichen der Maximalgeschwindigkeit unendlich oft zu den Zeitpunkten

$$t_k = \frac{T}{2} + kT = \frac{2k+1}{2} T = \frac{\pi}{\omega} + \frac{2\pi k}{\omega} = \frac{\pi}{\omega}(2k+1), \qquad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{5}$$

Nach (3) errechnet sich die maximale Geschwindigkeit mit den gegebenen Zahlenwerten zu

$$v_{\max} = \frac{2qE_0}{m\omega} = \mathbf{0{,}048\,m\,s^{-1}}. \tag{6}$$

Bemerkungen:

1. Die Anfangsbedingung $v(0) = 0$ sorgt dafür, dass der Faktor 2 in (6) erscheint, und damit nicht etwa $v_{\max} = 0{,}024\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ als Ergebnis erhalten wird, was etliche Male passierte. Noch cooler als der oben beschriebene Weg als Extremwertaufgabe ist hier die Ausnutzung des Additionstheorems $1 - \cos(\omega t) = 2\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$, welches anstelle von (3) unmittelbar auf

$$v(t) = \frac{2qE_0}{m\omega}\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad v_{\max} = \frac{2qE_0}{m\omega}$$

führt, Letzteres, da die Funktion $\sin^2(\dots)$ das Maximum 1 hat.

2. Man hätte auch argumentieren können, dass die Geschwindigkeit extremal wird, wenn die gegebene Beschleunigung null wird (einmal $a(t)$ integrieren und danach wieder ableiten und die Ableitung null setzen, Extremwertaufgabe!). Dies hätte aber auch die Zeitpunkte der Minimalgeschwindigkeiten (nämlich $v_{\min} = 0$) geliefert, die anschließend noch hätten aussortiert werden müssen, etwa über die Berechnung der zweiten Ableitung von $v(t)$.

3. Schließlich kann noch die Ortsfunktion $x(t)$ durch nochmalige Integration ausgerechnet werden (wenn als Anfangsbedingung mal $x(t = 0) = 0$ angenommen wird):

$$x(t) = \frac{qE_0}{m\omega}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin(\omega t)\right). \tag{7}$$

Sie ist ebenfalls im Bild oben zu sehen. Es stellt sich heraus, dass $x(t)$ monoton wächst, und *nicht* eine um $x = 0$ oszillierende Funktion ist, wie man es eventuell erwartet hätte. Dass dies hier nicht so ist, liegt an der Anfangsbedingung $v(0) = 0$, die den „pulsartigen Vorschub“ in positive x-Richtung bewirkt.

Nimmt man dagegen als Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = -v_0$ mit der Abkürzung $v_0 = \frac{qE}{m\omega}$ an, so liefert die gleiche Rechnung wie oben:

$$v(t) = -v_0\cos(\omega t)$$
$$x(t) = -\frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) = -\frac{1}{\omega^2}a(t).$$

Dies ist das oben erwähnte oszillierende Verhalten, bei dem der Körper um eine feste Ruheposition schwingt. Nur hier gilt $a(t) \sim -x(t)$; dagegen gilt $a(t) = \ddot{x}(t)$ in beiden Fällen, wie es sein muss.

4. Einige Teilnehmer:innen haben während der gesamten Rechnung den Einheitsvektor $\boldsymbol{i}$ mitgeschleppt; man hätte sich seiner gleich zu Beginn entledigen können, indem festgestellt wird, dass alles auf der x-Achse abläuft.

Punktverteilung:

- 0,2 Punkte für den Kraftansatz (1), jeweils 0,1 Punkte für $F = qE_0$ bzw. $F = ma$
- 0,2 Punkte für die Beschleunigung (2)
- 0,4 Punkte für die Geschwindigkeit (3)
- 0,2 Punkte für das richtige numerische Ergebnis (6)
- 0,2 Punkte Abzug, wenn der Faktor 2 in (6) nicht auftaucht, also nur $0{,}024\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ als Ergebnis angegeben wird
- 0,1 Punkte Abzug, wenn in (3) das falsche Vorzeichen auftritt und danach mit dem Betrag weitergerechnet werden muss um die Situation zu retten
- 0,1 Punkte Abzug, wenn die Zehnerpotenz in (6) nicht stimmt, aber die Ergebnisziffern $\dots 48 \dots$ richtig sind
- eine evtl. falsche Angabe der Zeitpunkte (5) für die Maxima wird nicht bestraft