Physik-Marathon 2023

– Aufgabe 12/20 –

(28. August – 03. September)

Die Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche eines Exo-Planeten beträgt $0{,}31\,g$, wobei g die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche ist. Die durchschnittliche (Massen-) Dichte des Planeten ist um ein Viertel kleiner als diejenige der Erde. Die Fluchtgeschwindigkeit auf der Erde beträgt $11{,}2\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

Berechne ausschließlich aus diesen Angaben die Fluchtgeschwindigkeit auf der Oberfläche des Exo-Planeten! Bei Verwendung von anderen als den oben angegebenen zahlenmäßigen Angaben, z. B. aus Tafelwerken oder aus dem Internet, wird die Aufgabe als nicht gelöst gewertet.

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung:

Es werden einige Gleichungen zwischen den beteiligten physikalischen Größen benötigt (hier zunächst für die Erde: R Erdradius, M Erdmasse, m Probemasse, γ Gravitationskonstante):

$$mg = \frac{\gamma m M}{R^2} \qquad \text{(Gravitationsgesetz)}, \tag{1}$$

$$\frac{m}{2} v_2^2 = \frac{\gamma m M}{R} \qquad \text{(Energiesatz zur Berechnung der Fluchtgeschwindigkeit } v_2\text{)}, \tag{2}$$

$$\varrho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} \qquad \text{(Dichte)}. \tag{3}$$

Die Gleichungen (1) und (2) können so kombiniert werden (durch Elimination von $\frac{\gamma m M}{R}$), dass die Gleichung

$$v_2 = \sqrt{2gR} \tag{4}$$

entsteht, während (1) und (3) (durch Elimination von M) auf

$$R = \frac{3g}{4\pi\gamma\varrho} \tag{5}$$

führen. Wird nun (5) in (4) eingesetzt, ergibt sich diejenige Gleichung, die nur die Variablen enthält, für die Zahlenwerte beider Planeten gegeben sind:

$$v_2 = \sqrt{\frac{3}{2\pi\gamma}} \cdot \frac{g}{\sqrt{\varrho}}. \tag{6}$$

Nun werden alle vorkommenden planetenspezifischen Größen mit Indizes versehen (E für Erde und P für Planet) und Quotienten gebildet (wodurch sich die „unerwünschte" Konstante $\sqrt{\frac{3}{2\pi\gamma}}$ in (6) herauskürzt). Es folgt

$$\frac{v_{2,\mathrm{P}}}{v_{2,\mathrm{E}}} = \frac{g_\mathrm{P}}{g_\mathrm{E}} \sqrt{\frac{\varrho_\mathrm{E}}{\varrho_\mathrm{P}}} = 0{,}31 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} = 0{,}358. \tag{7}$$

Die gesuchte Fluchtgeschwindigkeit auf dem Exo-Planeten beträgt somit

$$v_{2,\mathrm{P}} = \frac{\mathbf{0{,}31}}{\sqrt{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}}} \cdot \mathbf{11{,}2}\,\mathrm{km\,s^{-1}} \approx \mathbf{4\,km\,s^{-1}}, \tag{8}$$

wobei die in grün dargestellten Zahlen genau die gegebenen Zahlenangaben sind.

Bemerkung:

Hier eine Auflistung des korrekten Faktors in (8) vor dem Wert $11{,}2\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, in der Reihenfolge wie die Lösungen eintrafen:

$$\sqrt{0{,}31 \cdot \frac{31}{75}},\quad \frac{31}{50\sqrt{3}},\quad \sqrt{0{,}31 \cdot \frac{0{,}31}{0{,}75}},\quad \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \frac{31}{75},\quad \frac{2 \cdot 0{,}31}{\sqrt{3}},\quad \frac{31\sqrt{3}}{150},\quad \frac{0{,}31}{\sqrt{0{,}75}},\quad \sqrt{\frac{961}{7500}},$$
$$\frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot 0{,}31,\quad \sqrt{\frac{4}{3} \cdot 0{,}31^2},\quad \frac{1}{\sqrt{\frac{7500}{961}}},\quad \frac{0{,}62}{\sqrt{3}},\quad 0{,}75^{-\frac{1}{2}} \cdot 0{,}31,\quad \sqrt{\frac{0{,}34 \cdot 3}{8}},\quad \frac{62}{100\sqrt{3}},\quad \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{961}{5625}}.$$

Mir war bei der Aufgabenstellung nicht bewusst, dass es so viele Darstellungen gibt! Klasse von euch.

Punktverteilung:

- 0,8 Punkte für das Aufstellen von (6)
- 0,2 Punkte für den Rest bis zum richtigen numerischen Ergebnis (8)
- 0,0 Punkte, falls irgendeine andere Konstante im Ergebnis benutzt wird
- nur 0,9 Punkte, falls mit 0,25 beim Dichteverhältnis anstelle von 0,75 gerechnet wurde, aber ansonsten alles richtig ist