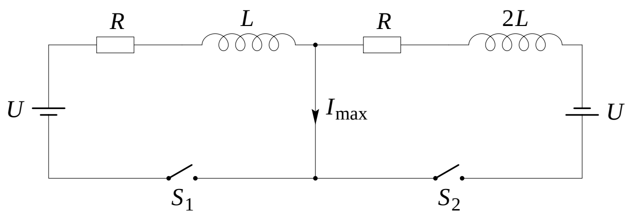
Physik-Marathon 2023

– Aufgabe 11/20 –

(21. August – 27. August)

In der unten abgebildeten Schaltung werden die Schalter S_1 und S_2 gleichzeitig zur Zeit $t = 0$ geschlossen, woraufhin ein Stromfluss beginnt. Die beiden Batterien liefern diesselbe konstante Spannung U und ihre jeweilige Polarität ist im Bild angegeben.



Gegeninduktivitäten zwischen den Spulen werden vernachlässigt.

Berechne den maximalen Strom $I_{\max}$ im mittleren Zweig!

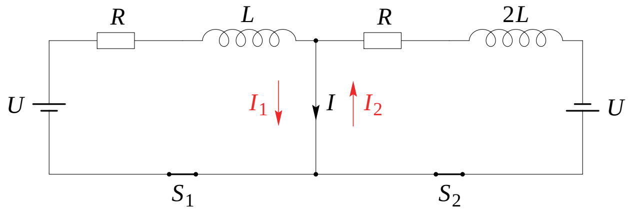
☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung:

(Bild oben) In beiden Stromkreisen links (Index 1) und rechts (Index 2) beginnen zur Zeit $t = 0$ die Stromflüsse

$$I_1(t) = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right), \qquad I_2(t) = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}\right), \tag{1}$$

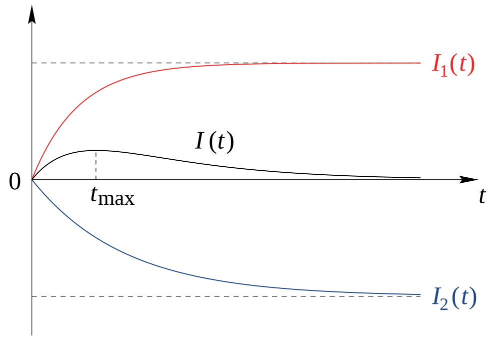
die wegen der angegebenen Polaritäten der Batterien entgegengesetzt gerichtet sind. (Die Gleichungen (1) herzuleiten, ist eine Extra-Aufgabe!)



Der resultierende Strom $I(t) = I_1(t) - I_2(t)$ im Querzweig beträgt daher mit (1)

$$I(t) = \frac{U}{R}\left(\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right). \tag{2}$$

Die drei Ströme $I_1(t)$, $I_2(t)$ und $I(t)$ sind im folgenden Bild dargestellt:



Der maximale Strom $I_{\max}$ kann nun durch Nullsetzen der ersten Ableitung nach der Zeit berechnet werden. Aus (2) ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{U}{R}\left(-\frac{R}{2L}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t_{\max}} + \frac{R}{L}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t_{\max}}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t_{\max}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t_{\max}}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t_{\max}} = \frac{1}{2} = \mathrm{e}^{\ln\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{-\ln 2}$$

$$\Longrightarrow \quad t_{\max} = \frac{2L}{R}\ln 2. \tag{3}$$

Aus (2) folgt mit (3) der maximale Strom:

$$I_{\max} = \boldsymbol{\frac{U}{4R}}. \tag{4}$$

Alternative Lösung für den letzten Schritt:

Es geht auch ganz elementar – ohne Differenzialrechnung –, das Maximum zu herauszufinden, wie mehrere Teilnehmer es ausführten. Weil in (2) der Subtrahend gerade das Quadrat des Minuenden ist, bietet sich eine quadratische Ergänzung an; die „Mutter" aller Ungleichungen: $(x-a)^2 \geq 0$. Setzen wir hier $x = \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}$, dann wird aus (2):

$$I(t) = \frac{U}{R}(x - x^2) = \frac{U}{R}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + x - x^2\right) = \frac{U}{R}\left(\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right). \tag{5}$$

Dieser Ausdruck wird offensichtlich maximal, wenn das innere Quadrat verschwindet, und der Maximalwert lässt sich unmittelber ablesen: $\boldsymbol{\frac{U}{4R}}$.

Eine Nuance anders, aber nicht weniger originell, ist es, die AM-GM-Ungleichung heranzuziehen:

$$x - x^2 = x(1-x) \leq \left(\frac{x + (1-x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \tag{6}$$

Bemerkung:

Verallgemeinert man den Faktor 2 der Induktivität im rechten Kreis zum Faktor k ($k \in \mathbb{R}$), wie dies ein Teilnehmer tat, dann ergibt die analoge Rechnung wie oben

$$t_{\max} = \frac{k \ln k}{k-1} \cdot \frac{L}{R}, \qquad I_{\max} = \frac{U}{R}\left(k^{-\frac{1}{k-1}} - k^{-\frac{k}{k-1}}\right) = \frac{U}{R} \cdot \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt[k-1]{k}}. \tag{7}$$

Punktverteilung:

- 0,4 Punkte für das Aufstellen von (1)
- 0,1 Punkte für das Aufstellen von (2)
- 0,3 Punkte für das Ausrechnen von (3)
- 0,2 Punkte für das richtige Ergebnis (4)