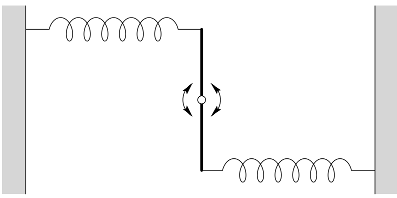
Physik-Marathon 2023

– Aufgabe 10/20 –

(03. Juli – 20. August)

Ein dünner, homogener Stab der Länge l und Masse m ist drehbar um seinen Mittelpunkt gelagert. An seinen Enden sind zwei identische Federn mit gleicher Federkonstante k befestigt. Die anderen Enden der Federn sind an festen Wänden fixiert. Das Bild zeigt die Ruhelage der Anordnung; der Stab ist parallel zu den Wänden ausgerichtet und die Abstände der Stabenden zu den Wänden sind gleich.

Der Stab kann frei um seinen Mittelpunkt in einer horizontalen Ebene schwingen. Gewichts- und Reibungskräfte spielen dabei keine Rolle.

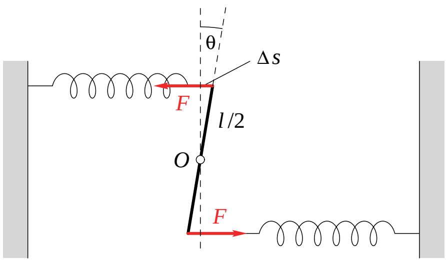


Nun wird der Stab geringfügig um einen kleinen Winkel θ aus seiner Ruhelage ausgelenkt und losgelassen.

Leite eine Gleichung her, mit deren Hilfe die Frequenz der einsetzenden harmonischen Schwingung berechnet werden kann!

☞ Lösung und Punktverteilung auf der Rückseite.

Lösung:
Bei Auslenkung des Stabes um einen kleinen Winkel θ um seinen Mittelpunkt O wirken zwei Kräfte des Betrages F an den Enden des Stabes, die ihn wieder in die Ruhelage zurücktreiben, wie im folgenden Bild zu sehen ist (beide Federn werden dabei geringfügig gedehnt):



Jede dieser Kräfte hat ein Drehmoment $\boldsymbol{M}$ zur Folge, dessen Betrag sich zu

$$M = |\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}| = |\boldsymbol{r}|\,|\boldsymbol{F}|\,\sin(\theta + 90\,°) = \frac{l}{2} F \sin(\theta + 90\,°) = \frac{l}{2} F \cos\theta \approx \frac{lF}{2} \tag{1}$$

berechnet. Der Vektor $\boldsymbol{r}$ ist hierbei vom Drehpunkt O zum Kraftangriffspunkt am Stabende gerichtet. Man kann mit der Rechten-Hand-Regel überprüfen, dass $\boldsymbol{M}$ in O aus der Zeichenebene herauskommt, die anfängliche Drehung also entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn erfolgt.

Die Einschränkung „geringfügige Auslenkung" bedeutet hier, dass die sog. *Kleinwinkelnäherung* $\cos\theta \approx 1$ (bzw. $\sin\theta \approx \theta$) in (1) angewendet werden kann. Die Verlängerung der Federn an ihren Enden beträgt $\Delta s \approx \frac{l}{2}\theta$ (Bogenlänge auf einem Kreis mit dem Radius $\frac{l}{2}$ und dem Zentriwinkel θ ist ungefähr gleich der Sehnenlänge Δs), so dass sich für die rücktreibende Federkraft

$$F = k\,\Delta s \approx \frac{kl\theta}{2} \tag{2}$$

ergibt. Damit folgt nach (1) für das gesamte Drehmoment (es greifen zwei Kräfte an): $M = 2 \cdot \frac{kl^2}{4}\theta = D\theta$ mit dem Direktionsmoment

$$D = \frac{kl^2}{2}. \tag{3}$$

Nun wird die Bewegungsgleichung für Drehbewegungen aufgestellt:

$$M = J\ddot{\theta} = -D\theta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ddot{\theta} = -\frac{D}{J}\theta = -\omega^2\theta, \tag{4}$$

wobei $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz der entstehenden harmonischen Schwingung ist. Somit ergibt sich: $\omega = \sqrt{\frac{D}{J}}$. Jetzt fehlt nur noch das Trägheitsmoment J eines dünnen, geraden Stabes der Masse m und der Länge l bei Drehung um seinen Mittelpunkt: $J = \frac{1}{12}ml^2$ (dies auszurechnen wäre eine Extra-Aufgabe). Man erhält schließlich:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = \sqrt{\frac{kl^2 \cdot 12}{2ml^2}} = \sqrt{\frac{6k}{m}} \quad \Longrightarrow \quad f = \boldsymbol{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6k}{m}}}. \tag{5}$$

Punktverteilung:

- 0,3 Punkte für das Berechnen des Drehmomentes (1)
- 0,3 Punkte für das Berechnen des Direktionsmomentes (3)
- 0,1 Punkte für das Aufstellen von (4) und dem Ablesen der Kreisfrequenz daraus
- 0,2 Punkte für das Trägheitsmoment $\frac{1}{12}ml^2$ des Stabes
- 0,1 Punkte für die richtige Gleichung (5)